This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google books

https://books.google.com

Dette er en digital kopi af en bog, der har været bevaret i generationer på bibliotekshylder, før den omhyggeligt er scannet af Google som del af et projekt, der går ud på at gøre verdens bøger tilgængelige online.

Den har overlevet længe nok til, at ophavsretten er udløbet, og til at bogen er blevet offentlig ejendom. En offentligt ejet bog er en bog, der aldrig har været underlagt copyright, eller hvor de juridiske copyrightvilkår er udløbet. Om en bog er offentlig ejendom varierer fra land til land. Bøger, der er offentlig ejendom, er vores indblik i fortiden og repræsenterer en rigdom af historie, kultur og viden, der ofte er vanskelig at opdage.

Mærker, kommentarer og andre marginalnoter, der er vises i det oprindelige bind, vises i denne fil - en påmindelse om denne bogs lange rejse fra udgiver til et bibliotek og endelig til dig.

Retningslinjer for anvendelse

Google er stolte over at indgå partnerskaber med biblioteker om at digitalisere offentligt ejede materialer og gøre dem bredt tilgængelige. Offentligt ejede bøger tilhører alle og vi er blot deres vogtere. Selvom dette arbejde er kostbart, så har vi taget skridt i retning af at forhindre misbrug fra kommerciel side, herunder placering af tekniske begrænsninger på automatiserede forespørgsler for fortsat at kunne tilvejebringe denne kilde.

Vi beder dig også om følgende:

- Anvend kun disse filer til ikke-kommercielt brug
  Vi designede Google Bogsøgning til enkeltpersoner, og vi beder dig om at bruge disse filer til personlige, ikke-kommercielle formål.
- Undlad at bruge automatiserede forespørgsler
  Undlad at sende automatiserede søgninger af nogen som helst art til Googles system. Hvis du foretager undersøgelse af maskinoversættelse, optisk tegngenkendelse eller andre områder, hvor adgangen til store mængder tekst er nyttig, bør du kontakte os. Vi opmuntrer til anvendelse af offentligt ejede materialer til disse formål, og kan måske hjælpe.
- Bevar tilegnelse
  Det Google-"vandmærke" du ser på hver fil er en vigtig måde at fortælle mennesker om dette projekt og hjælpe dem med at finde yderligere materialer ved brug af Google Bogsøgning. Lad være med at fjerne det.
- Overhold reglerne
  Uanset hvad du bruger, skal du huske, at du er ansvarlig for at sikre, at det du gør er lovligt. Antag ikke, at bare fordi vi tror, at en bog er offentlig ejendom for brugere i USA, at værket også er offentlig ejendom for brugere i andre lande. Om en bog stadig er underlagt copyright varierer fra land til land, og vi kan ikke tilbyde vejledning i, om en bestemt anvendelse af en bog er tilladt. Antag ikke at en bogs tilstedeværelse i Google Bogsøgning betyder, at den kan bruges på enhver måde overalt i verden. Erstatningspligten for krænkelse af copyright kan være ganske alvorlig.

Om Google Bogsøgning

Det er Googles mission at organisere alverdens oplysninger for at gøre dem almindeligt tilgængelige og nyttige. Google Bogsøgning hjælper læsere med at opdage alverdens bøger, samtidig med at det hjælper forfattere og udgivere med at nå nye målgrupper. Du kan søge gennem hele teksten i denne bog på internettet på `http://books.google.com`

Digitized by Google

LIBRARY
UNIVERSITY OF
CALIFORNIA
SAN DIEGO

Digitized by Google

QA
1
SSE

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MATEMATISK TIDSSKRIFT

A

2 ?

UDGIVET AF

MATEMATISK FORENING I KØBENHAVN

REDIGERET AF

I. L. W. JESSEN O. A. SMITH

AARGANG 1919 -20

Udgået af Studenterforeningens Bibliotek

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: JUL. GJELLERUPS FORLAG
TRYKT HOS J. JØRGENSEN & CO. (IVAR JANTZEN)
1919

Digitized by Google

Digitized by Google

INDHOLD.

AFHANDLINGER, SMAA-AFHANDLINGER O. LIGN.

Side

Bertelsen, B. P. cand. mag., Adjunkt: Karakteristikens Bestemmelse 103
— Lidt elementær algebraisk Systematik 125
Bredsdorff, Viggo cand. mag., Adjunkt: Pagodespillet . . . 101
Christensen, S. A. Dr. phil., Rektor: Forbindelsen mellem Sider og Vinkler i en Trekant hos Grækerne før Trigonometriens Udvikling 41
Friis-Petersen, Fr., Matematiklærer: De matematiske Opgaver ved Mellemskole- og Realeksamen 11, 48
Hjelmslev, J. Dr. phil. Professor: Trekantens Vinkelsum . . 3
Jensen, N. F. Adjunkt: Et Bevis for den pholemæiske Læresætning og dens om. Sætn. 58
Johansen, I F. Seminarielærer: Afkortet Multiplikation og Division 81
Kock, P. Skoleinspektør: Om Potenssummer 101
Larsen, O. cand. mag. Adjunkt: Vink ang. indledende Regneundervisning 54
Larsen, Tage Gymnasieelev: Bestemmelse af en Differentialkvotient 128
Palmø, E. Mag. art.: Regningsarternes Gyldighedsomraade . 122
Paulli, H. cand. polyt. Ingeniør: Bemærkninger til Opgave Nr. 375 i N. T. f. M. A. 74
— Om Fordelingen af 9 Punkter i en Plan, saaledes at Antallet af rette Linier gennem 3 Punkter bliver saa stort som muligt 117
π Bemærkninger om Potenssummer 127
Zeuthen, H. G. 1

Indsendte Spørgsmaal 116
Til Tidsskriftets Læsere og Medarbejdere 40, 116, 151
Prisopgaver for 1919 40

LITTERATURANMELDELSER.

Christensen, S. A.: Archimedes Sandregning (O A. S.) . . 128
Flindt, H. E.: Lærebog i Regning (V. Bredsdorff) 25
Frederiksen, P.: Kemisk Analyse (Chr Jensen) 134
Gallander, O.: Elementär Elektricitetslära (Chr. Jensen) . . 133
Hedstrøm, J. S. og Rendahl: Algebra, Trigonometri (Sigurd Kristensen) 129
Lundsgaard, E.: Regnestokken (Chr. Jensen) 56
Regnebogen VII, VI, af Cadovius m. fl. (Poul Frederiksen) 58
Tidsskrift för elementär M., F., K. (I. L. W. I., Chr. Jensen) 28, 56
Wiskundige Opgaven (G. M. Stensig) 133

Digitized by Google

Side

Aus Natur und Geisteswelt . . . . . . }
Matematisch-physikalisches Bibliothek } (G M. Stensig) . . 132, 131

OPGAVER.

Opgaver til Løsning: 1—10 37
11—18 77
19—39 110
40—50 146

Opgaver til Undervisningsbrug: 1—10 38
11—32 78
33—52 113
53—75 148

Løste Opgaver: 1—10 106
11—18 141

DANSKE EKSAMENSOPGAVER.

Adgangseksamen til polyt. Læreanstalt.

Juni 1919 85

Studentereksamen.

Maj 1919 88
Septb. » 137

Alm. Forberedelses-eksamen.

Oktb. 1918 32
Jan. 1919 34
Marts » 65
Juni » 91
Oktob. » 138

Pigeskoleeksamen.

Juni 1919 93

Realeksamen.

Jan. 1919 36
Marts » 67
Juni » 93

Mellemskoleeksamen.

Jan. 1919 36
Marts » 67
Juni » 94
Sept. » 140

Pigeskolens Faglærerinde-eksamen.

Oktb. 1918 30
April 1919 62
Oktb. » 135

Lærer- og Lærerinde-eksamen.

Maj 1919 95

Optagelsesprøve til 1. Seminarieklasse.

juni 1919 95

Skovbrugs- og Landinspektøreksamen.

Febr. 1919 60

SVENSKA EXAMENSUPPGIFTER.

Vårtermin 1919 71

NORSKE EKSAMENSOPGAVER.

1919 96

Rettelser 80, 152

Digitized by Google

Digitized by Google

DENTERF… GEN.

H G Zeuthen

Digitized by Google

H. G. Zeuthen.

Den 15. Februar 1919 fylder Professor Zeuthen 80 Aar. Den danske Matematiks Nestor kan paa denne Dag med berettiget Stolthed se tilbage paa sit Arbejde, fra han begyndte sit Medarbejderskab ved »Mathematisk Tidsskrift« for netop 60 Aar siden, indtil den nyeste Afhandling, »Sur les définitions d'Euclide« i Scientia for Oktober 1918. Hvilken Fylde af matematiske og historiske Undersøgelser! Lige fra Begyndelsen greb den unge Zeuthen ind i sin Tids geometriske Forskning med Doktorafhandlingen »Om Systemer af Keglesnit« og fortsatte med det store Arbejde »Om Systemer af algebraiske Kurver«, hvortil slutter sig den lange Række antalgeometriske Undersøgelser vedrørende Korrespondancer paa algebraiske Kurver og Flader med Opdagelsen af Zeuthens Invariant, og endelig i 1914 den omfattende »Lehrbuch der abzählenden Methoden in der Geometrie«, som er uundværlig for enhver, der vil trænge ind paa dette Arbejdsfelt. Og nu de matematik-historiske Hovedværker: »Keglesnitslæren i Oldtiden«, de to Bind »Forelæsninger over Mathematikens Historie« og i 1917 »Hvorledes Mathematiken i Tiden fra Platon til Euklid blev rationel Videnskab«, som alle igen støtter sig til de mange Enkeltundersøgelser, offentliggjorte i Videnskabernes Selskabs Oversigter og i Udlandets Tidsskrifter.

Paa begge disse Omraader har Zeuthens Arbejder været af overordentlig Betydning, præget som de er af stor Originalitet

Digitized by Google

baade i Metoder og Grundsynspunkter. Denne Selvstændighed har været saa udpræget, at man undertiden med et Stænk af Skepsis har kaldt ham den »fantasifulde« Matematikhistoriker. Men Zeuthen har haft den dybe Tilfredsstillelse, at faa Berettigelsen af sit fantasifulde Syn paa den klassiske Matematiks Tilblivelse bekræftet ved Heibergs Fund af Arhimedes's »Ephodos«.

Danske Matematikere kan da med Beundring se op til Zeuthen som deres Fører og Lærer gennem mange Aar. Ikke blot bragte han Udlandets matematiske Tænkning til Danmark og blev derved Udspring for dansk matematisk Forskning, men ved sit eget Arbejde skaffede han den danske Matematik Anseelse ude saaledes, at det for de unge, som senere studerede ved Udlandets Universiteter, blev en Opmuntring, at man der med dyb Respekt nævnte Zeuthens Navn. Og denne Ærbødighed var saa meget større, som Zeuthen personlig vandt alle ved sin Karakters Alvor og Renhed, sit milde, elskelige Væsen og sin Ridderlighed.

Matematisk Tidsskrift har, frem for nogen, Grund til at bringe Professor Zeuthen sin Lykønskning og Tak. 1871—89 var han Tidsskriftets Redaktør, i 60 Aar dets trofaste Medarbejder; og har Tidsskriftet haft sin Betydning for den matematiske Udvikling her i Landet, saa har Zeuthen haft en meget væsentlig Andel deri.

Redaktionen frembærer da for Professor Zeuthen Ønsket om endnu en Række lykkelige og frugtbringende Aar; og alle danske Matematikere vil slutte sig til os i en beundrende Tak for alt, hvad han har skænket vort Land som Lærer og Forsker.

Digitized by Google

Trekantens Vinkelsum.

Af J. Hjelmslev.

1. I 1ste Bog af *Euklids Elementer* finder man i Nr. 16 følgende Sætning*):

I enhver Trekant er, naar en af Siderne er forlænget, den udvendige Vinkel større end enhver af de indvendige og modstaaende Vinkler.

Det vil med andre Ord sige, at Nabovinklen til den ene Vinkel i en Trekant altid er større end enhver af de andre Vinkler i Trekanten. Beviset former sig i Hovedsagen saaledes (Fig. 1):

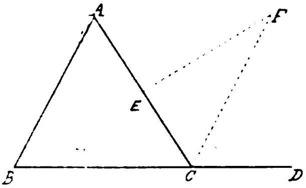


Fig 1.

Lad ABC være den givne Trekant, og lad Siden BC være forlænget til D. Vi skal da bevise, at Vinklen ACD, som er Nabovinkel til $\angle C$ i Trekanten, er større end $\angle A$. Medianen BE drages og forlænges til F, saaledes at $EF = BE$. Linien FC drages. $\triangle CEF$ vil da være kongruent med $\triangle AEB$, idet de to Trekanter har Vinklerne ved E lige store, og de indesluttende Sider stykkevis lige store. Vinklen ECF er da $= \angle A$, og den udgør en Del af $\angle ACD$. Sidstnævnte Vinkel er derfor større end A. Paa samme Maade kan det vises, at den er større end $\angle B$, og Sætningen er dermed bevist.

2. Den næste Sætning hos *Euklid* (Nr. 17) udsiger, at

I enhver Trekant er 2 hvilke som helst Vinkler tilsammen mindre end 2 rette.

Beviset faas umiddelbart ved Anvendelse af den foregaaende Sætning, idet Uligheden

$$A < 180^0 - C$$

straks medfører, at

$$A + C < 180^0.$$

For at to Vinkler skal kunne forekomme som Vinkler i en Trekant, er det altsaa nødvendigt, at Summen af dem er mindre end 180^0.

---

*) *Euklids Elementer* I—II, oversat af *Thyra Eibe*, København 1897, S. 24.

Digitized by Google

Man lægger Mærke til, at Beviserne for de to Sætninger er ført alene paa Grundlag af simple Kongruensbetragtninger.

3. Skal man konstruere en Trekant af en Side og de to hosliggende Vinkler, bliver det efter det foregaaende en nødvendig Betingelse, at Summen af de to givne Vinkler er mindre end 180^0. Men er Betingelsen ogsaa tilstrækkelig? Kan man med andre Ord være vis paa, at Trekanten eksisterer, naar Betingelsen er opfyldt?

Paa dette Spørgsmaal finder man ogsaa et Svar hos *Euklid.* Men ikke i Form af en Sætning. Kun i Form af et Postulat. Det er det 5te Postulat. Det lyder saaledes*):

L a d d e t v æ r e f o r u d s a t, a t n a a r e n r e t L i n i e s k æ r e r t o r e t t e L i n i e r, o g d e i n d v e n d i g e V i n k l e r p a a s a m m e S i d e e r m i n d r e e n d t o r e t t e, s a a m ø d e s d e t o L i n i e r, n a a r d e f o r l æ n g e s u b e g r æ n s e t, p a a d e n S i d e, h v o r d e t o V i n k l e r l i g g e, d e r e r m i n d r e e n d t o r e t t e.

Man ser, at den her opstillede Paastand netop er ensbetydende med den, at man altid kan konstruere en Trekant af en given Side og to givne hosliggende Vinkler, naar blot disse er opgivet saaledes, at de tilsammen er mindre end 2 rette.

4. Afsætter man ud fra et Liniestykke *AB*, paa samme Side af Linien *AB*, to Vinkler *ABC* og *BAD*, hvis Sum er = 2 rette, kan Linierne *AD* og *BC* ikke skære hinanden til nogen af Siderne, hvor langt de end forlænges. Hvis de nemlig skar hinanden til den Side, der angives ved Retningen *AD*, vilde de sammen med *AB* begrænse en Trekant, og Summen af de to Vinkler *ABC* og *BAD* maatte da blive mindre end 2 rette. Og hvis de skar hinanden til den anden Side, vilde der dannes en Trekant paa den Side af *AB*, og dette vilde medføre, at Summen af de to Vinkler *ABC* og *BAD* maatte være større end 2 rette. I begge Tilfælde kommer man altsaa til noget, der strider imod det givne.

Man kommer nu let til de andre Former for den samme Sætning, at to Linier, der skæres af en tredje under lige store ensliggende Vinkler el. lign., ikke kan skære hinanden.

Herved er det bevist, at der eksisterer rette Linier, der

*) Thyra Eibes Oversættelse S. 4.

Digitized by Google

aldrig skærer hinanden, hvor langt de end forlænges. Saadanne Linier kaldes parallelle.

5. At omvendt to parallelle Linier altid med en skærende Linie vil danne lige store ensliggende Vinkler og uensliggende Vinkler, der tilsammen udgør 2 rette, vises indirekte ved Hjælp af det 5. Postulat. Hvis nemlig to uensliggende Vinkler tilsammen var større eller mindre end 2 rette, vilde Linierne i Følge dette Postulat skære hinanden til den ene eller den anden Side.

6. Derefter kan man ved den kendte Konstruktion af parallele Linier vise, at der gives een og kun een Linie, som gaar gennem et givet Punkt og er parallel med en given Linie, der ikke gaar gennem vedkommende Punkt.

7. Sluttelig bevises Sætningen om Trekantens Vinkelsum, idet man gennem den ene Vinkelspids trækker en Linie parallel med den modstaaende Side, hvorved man samler alle Trekantsvinklerne ved Toppunktet, saaledes at det bliver indlysende, at de tilsammen udgør 2 rette.

8. Dette er en kortfattet fri Gengivelse af *Euklids* Behandling af Vinkelsummen i en Trekant. Som man ser, er det i Hovedsagen de samme Betragtninger, som man finder i mange Lærebøger den Dag i Dag. Det 5te Postulat er dog sædvanlig erstattet med den Paastand, at der gennem et Punkt kan drages een og kun een Linie, som er parallel med (d. v. s. »ikke skærer«) en given Linie, der ikke indeholder Punktet. Naar man i vore Dage taler om »Parallelaksiomet«, er det i Regelen den sidste Paastand man mener. Indførelsen af dette Aksiom (som findes omtalt hos *Proklos*) i Stedet for *Euklids* oprindelige 5te Postulat medfører den Simplifikation i Fremstillingen, at man kan undvære at opstille de før nævnte Sætninger 16 og 17 hos *Euklid*, medens Betragtningerne ellers i alt væsentligt bliver de samme.

9. Sammenligner man nu Udgangspunktet, det 5te Postulat eller Parallelaksiomet, med Resultatet, Sætningen om Trekantens Vinkelsum, er Forskellen iøjnefaldende. Udgangspunktet indeholder noget transcendentalt, noget »uendeligt«, eller hvad man vil kalde det, noget som rummer en vis Tilfredsstillelse for Tanken, men som efter sit Væsen unddrager sig en virkelig Kontrol. Trekantens Vinkelsum derimod er noget, der kan

Digitized by Google

kontrolleres. For en logisk Analyse, der kun har til Hensigt at analysere, d. e. at føre alle Sætninger tilbage til visse oprindelige Paastande, ud fra hvilke man faar et tilstrækkeligt Grundlag til at bevise Geometriens Indhold, medens man iøvrigt ikke paalægger dette Grundlag nogen anden Betingelse end den, at det tankemæssigt set skal forme sig som et til det nævnte Formaal fyldestgørende System af Hypoteser, der i sig selv ikke nærmere skal kontrolleres, for den vil maaske det 5te Postulat (eller Parallelaksiomet) være simplere end Sætningen om Vinkelsummen i en Trekant.

Men i en Geometri, der handler om det virkelige Rum, eller som i det mindste gør Krav paa at kunne yde en vis Sikkerhed for, at den kan anvendes paa Virkeligheden, i en saadan Geometri kan den Sætning, der udtales i det 5te Postulat eller i Parallelaksiomet overhovedet ikke opstilles. Den lader sig ikke blot slet ikke kontrollere, men dens Indhold er uden egentlig Mening. I en saadan Geometri vil det ligge langt nærmere at opstille som Udgangspunkt, at Vinkelsummen i en Trekant er 2 rette. Det er i alt Fald en Sætning, der har en bestemt Betydning, og som lader sig direkte kontrollere.

10. Og herved kommer man da ind paa den anden Hovedbetragtning, der gennem Tiderne har gjort sig gældende med Hensyn til disse Spørgsmaal, at lægge et af Geometriens Udgangspunkter i selve Sætningen om Trekantens Vinkelsum eller i en direkte dermed beslægtet Sætning. Vi skal i den Henseende først nævne den af *Thibaut* i 1809 antagne og i den senere Lærebogslitteratur ret udbredte Forudsætning, som i Hovedsagen gaar ud paa, at naar en ret Linie drejer sig til samme Side i Panen om forskellige af sine Punkter, indtil den første Gang kommer tilbage til sin oprindelige Stilling, vil Summen af Drejningerne udgøre en hel Omdrejning. Om denne Paastand bemærker *Schur* (i sin *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1909), at den rummer en temmelig plump og falsk Antagelse. Og sandt at sige, er denne Dom ingenlunde for haard. Berettigelsen til at opstille den nævnte Paastand maatte jo udelukkende søges deri, at Antagelsen af Paastanden var naturligere for Tanken end den direkte Antagelse af Sætningen om Vinkelsummen i en Trekant. Men ser man nærmere til, er dette ingenlunde Tilfældet. I første Øjeblik vil en og anden maaske mene, at Paastanden er ret indlysende. Ordene lyder saa simpelt og ligetil. Men naar man skal til at gøre

Digitized by Google

Rede for, hvad Ordene egentlig betyder, begynder det at knibe. I den Henseende er den *Thibaut*'ske Paastand overordentlig farlig: Den dækker over Vanskelighederne ved et Spil af Ord. Man forstaar slet ikke, hvad det er, der ligger deri, før man har reduceret den hele Paastand til følgende: Naar en bevægelig Plan forskydes i en fast Plan saaledes, at en ret Linie i den første glider i en ret Linie i den anden, da vil enhver given ret Linie i den bevægelige Plan danne en i Størrelse uforanderlig Vinkel med enhver anden given Linie i den faste Plan. Men naar det er det, der er Hovedsagen, hvorfor saa ikke sige det rent ud? I Stedet for at skjule det og lade som om det ikke vedkommer os. Men ganske vist, Sagen bliver jo saa ikke helt indlysende mere.

Helt latterligt er det, ved Hjælp af den nævnte Paastand, først at vise Sætningen om Trekantens Vinkelsum og derpaa benytte denne til Bevis for, at naar to Linier skæres af een Linie under lige store ensliggende Vinkler, vil de skæres af enhver anden Linie under lige store ensliggende Vinkler. Det er ved Hjælp af Sætning A at bevise Sætning B, og derpaa ved Hjælp af Sætning B at bevise Sætning A igen.

11. Langt at foretrække vilde det være at opstille Sætningen om Trekantens Vinkelsum som Forudsætning, som et Erfaringsresultat, der ved vidtdrevne Kontrolprøver har vist sig at være rigtigt. Men man behøver ikke at tage en vilkaarlig Trekant. Man kan nøjes med den Sætning, at i en retvinklet Trekant er Summen af de spidse Vinkler $= 90^0$. Og denne kan atter føres tilbage til Sætningen om Rektanglets Eksistens: I en Firkant med 3 rette Vinkler er den fjerde Vinkel ogsaa ret. Rektanglets Eksistens er noget af det for den direkte Kontrol mest umiddelbart tilgængelige, og det vil derfor være naturligt, at man vælger sit Udgangspunkt her. Parallelle Linier defineres da som Linier, der er vinkelrette paa samme tredje, eller om man vil, som modstaaende Sider i et Rektangel. Den sædvanlige Forestilling om parallelle Linier som Linier, der overalt har samme indbyrdes Afstand, knytter sig umiddelbart hertil *). Ved Undervisning for Begyndere vil der naturligvis ikke være Anledning til at drive Analysen videre. Men det har stor videnskabelig Interesse at gaa endnu

*) Se min Elementær Geometri, 1916, S. 21.

Digitized by Google

et Skridt videre. Man kan nemlig nøjes med følgende simple Forudsætning: Der eksisterer eet eneste Rektangel.

12. Det Papir, man tegner paa, den Tavle, man tegner paa, er en Firkant, hvori alle 4 Vinkler er rette. Dette vil være nok til at bevise, at Trekantens Vinkelsum er 2 rette. Lad det givne Rektangel være $ABCD$ (Fig. 2). Den vinkelrette paa Midten af BC er MN. Den er ogsaa $\perp AD$. Ved Drejning om MN kan man nemlig bringe BM til at dække CM, $\angle B$ til at dække $\angle C$, medens samtidig Siden BA falder ud ad Linien CD. Den vinkelrette fra N paa AB vil da dække den vinkelrette fra N paa CD, og Punktet A falder derfor i D. De to Firkanter $MBAN$ og $MCDN$ bliver altsaa kongruente, og de to Vinkler ved N lige store; hver af dem er da = en ret. Endvidere er $AN = DN$, $BA = CD$. Altsaa:

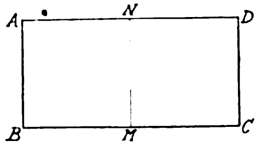


Fig. 2.

I et Rektangel er modstaaende Sider lige store. Den vinkelrette paa Midten af en Side er ogsaa vinkelret paa Midten af den modstaaende Side.

13. Lad nu P være et vilkaarligt Punkt af BC (Fig. 3). Den vinkelrette i P skærer AD i Q. Vi oprejser $MN \perp$ Midten af BP og $RS \perp$ Midten af PC. Ved Omlægning af Firkanten $MBAN$ omkring MN vil man faa den til at dække Firkanten $MPQN$. I modsat Fald vilde nemlig BA være forskellig fra QP, saaledes at BA f. Eks. ved Omlægning om MN fik Stillingen PA_1. Samtidig foretages en Omlægning af $SDCR$ til Dækning med Firkanten SA_1PR ($PA_1 = CD$). Da nu imidlertid NA_1 og SA_1 begge skal være $\perp PQ$, vil de falde ud ad samme Linie SN, og A_1 rykker altsaa i Virkeligheden op i Q.

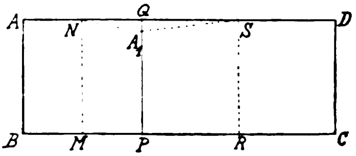


Fig. 3.

Heraf følger da, at $PQ \perp AD$, saa at Firkanterne $ABPQ$ og $PQDC$ er Rektangler. Altsaa:

Enhver Linie, der er vinkelret paa den ene Side i et Rektangel vil ogsaa være vinkelret paa den modstaaende Side, saaledes at den deler Rektanglet i 2 Rektangler.

Digitized by Google

14. Afsættes nu paa BA og BC to vilkaarlige Stykker BU og BV (Fig. 4), kan man ved Hjælp af den foregaaende Sætning bevise, at der eksisterer et Rektangel med de to Sider BU og BV.

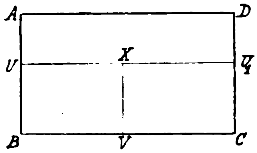


Fig. 4.

Først oprejses $UU_1 \perp AB$ i U. Den deler det givne Rektangel i 2, hvoraf vi betragter det ene BUU_1C. Nu oprejses en vinkelret paa BC i V. Den deler det sidstnævnte Rektangel i 2 Rektangler, hvoraf det ene $BUXV$ har de givne Sider BU og BV. Der eksisterer altsaa et Rektangel med vilkaarligt opgivne Dimensioner mindre end det givne Rektangels Dimensioner. Derefter kan man nu bevise Sætningen om Vinkelsummen paa bekendt Maade.

Beviset gælder i omtrent uforandret Skikkelse ogsaa, naar Punktet P falder paa Forlængelsen af BC.

Det her fremsatte Bevis skyldes i Hovedsagen *Lambert* *). Men Sætningen var allerede forud fremsat og bevist af *Saccheri* **). *Saccheri* benyttede dog nogle Kontinuitetsbetragtninger, som ikke forekommer i *Lamberts* Fremstilling. *Lamberts* Bevis er jo i det hele overordentligt simpelt. Det er et af de interessanteste Resultater i Parallelteoriens Historie og burde kendes af enhver, der underviser i elementær Geometri.

15. Efter dette vil man let udlede det af *Saccheri* angivne Resultat, at dersom der eksisterer een eneste Trekant, hvori Vinkelsummen er 2 rette, da vil enhver Trekants Vinkelsum være 2 rette ***). Lad M og N (Fig. 5) være Midtpunkterne af Siderne AB og BC. Vi fælder de vinkelrette AP, BQ, CR paa Linien MN. Man har, da:

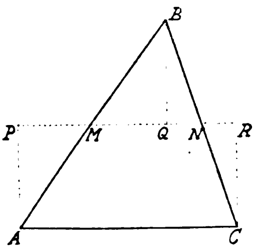


Fig. 5.

$$\triangle AMP \backsimeq BMQ,$$

*) *Lambert*, Theorie d. Parallellinien (1766) udgivet efter Forf.'s Død. 1786.

**) *Saccheri*, Euclides ab omni naevo vindicatus. Milano 1733.

Begge Afhandlinger findes i *Engel-Stäckel* Theorie der Parallellinien, Leipzig 1895.

***) Denne Sætning betegnes ofte som *Legendre*'s Sætning. Den er nemlig opstillet og bevist i *Legendre*'s Geometri og er vel navnlig derigennem bleven almindelig bekendt. Men *Saccheri*'s Bevis falder jo langt tidligere. Det samme gælder *Lambert*'s Bevis, som endogsaa er ført helt uafhængigt af »*Archimedes* Aksiom«.

Digitized by Google

idet de to Trekanter ved $\frac{1}{2}$ Omdrejning om M vil dække hinanden. Ligesaa har man:

$$\triangle CRN \backsim BQN.$$

Heraf følger da, $AP = CR$. Endvidere er Vinklerne A og C i Firkanten $APRC$ tilsammen lig Trekantens Vinkelsum. Men de to Vinkler er tillige indbyrdes lige store, da Firkanten har rette Vinkler ved P og R og $AP = CR$, saaledes at Firkanten deles symmetrisk af den vinkelrette paa Midten af PR. Vinklerne ved A og C er da begge rette, d. v. s. Firkanten er et Rektangel.

16. En anden interessant Reduktion af den almindelige Sætning om Vinkelsummen i en Trekant har man i følgende Sætning, der ligeledes skyldes *Saccheri:*

Saafremt der eksisterer 2 Trekanter, der har de samme Vinkler, og som ikke er kongruente, vil Vinkelsummen i enhver Trekant være 2 rette*).

Beviset føres saaledes (Fig 6): De to Trekanter lægges i saadanne Stillinger ABC og AB_1C_1, at de har Vinklen A fælles, medens $\angle B = B_1$, $\angle C = C_1$. Gennem Midtpunkterne M og N af BB_1 og CC_1 fældes vinkelrette paa BC. De træffer BC i P og S. Ved en halv Omdrejning af $\triangle MBP$ og $\triangle NCS$ om henholdsvis M og N faar man Trekanterne MQB_1 og NRC_1, hvor MQ og NR er Forlængelser af PM og SN, og hvor Vinklerne ved Q og R er rette. Derved dannes en Firkant $PQRS$, hvis Vinkler alle er rette, og dermed er Sætningen bevist.

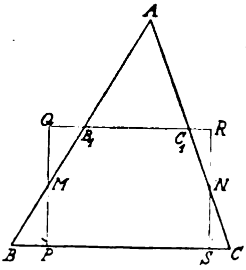


Fig. 6.

17. Man kunde tilsidst opstille det Spørgsmaal, om man, naar man nu vælger sit Udgangspunkt i Rektanglets Eksistens, da paa Grundlag heraf vil være i Stand til at bevise

*) Det er misvisende at betegne den her omtalte Forudsætning som »Forderung der Ähnlichkeit«, saaledes som *M. Simon* gør det i sin Bog »Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert«, Leipzig 1906. S. 57. Det er heller ikke helt rigtigt, naar det sammesteds er udtalt, at *Wallis* 1663 benyttede denne Forudsætning. *Wallis* benyttede den almindelige Forudsætning om ligedannede Figurers Eksistens, og det er noget ganske andet.

Digitized by Google

den Sætning, som udtrykkes i *Euklids* 5. Postulat eller i det saakaldte Parallelaksiom. Dette Spørgsmaal findes ogsaa behandlet hos *Saccheri* og *Lambert*, omtrent paa samme Maade. Paa Dansk findes en Fremstilling af Sagen i *Bonnesen*, Geometri for Mellemskolen, S. 102. Beviset beror paa to Forudsætninger: 1) Naar man har givet 2 Liniestykker a og b, kan man altid angive et helt Tal n saaledes, at $n \cdot a > b$; 2) et givet Liniestykke kan afsættes saa mange Gange (i Skridt) ud ad en ret Linie, som man vil. Den første Forudsætning hører til dem, der lader sig kontrollere ad empirisk Vej. Det er det saakaldte *Archimedes*'s Aksiom. Den anden hører til de »transcendentale« Hypoteser. Den kan ogsaa udtrykkes paa den Maade, at enhver ret Linie lader sig forlænge i det uendelige. Men da en saadan »Forlængelse i det uendelige« ikke lader sig forbinde med nogen praktisk gennemførlig Operation, hvorved den virkelig kan defineres, maa den naturlige Geometri holde sig fri for saadanne Antagelser. Vi ser da atter, men paa en ny Maade, at den Geometri, der skal handle om Virkeligheden, hverken direkte eller indirekte kan komme til at handle om saadanne Sager, som indeholdes i *Euklids* 5. Postulat eller Parallelaksiomet. Virkelighedens Geometri skal — for saavidt der er Tale om Plangeometri — handle om et Rektangel og de Figurer, der kan fremstilles inden for dettes Begrænsning.

De matematiske Opgaver ved Mellemskoleeksamen og Realeksamen.

En kritisk Vurdering.

Af Fr. Friis-Petersen.

Opgavesættene i Regning og Matematik til Mellemskole- og Realeksamen imødeses altid med den største Spænding; ikke alene Eleverne er spændte paa, hvorledes Opgaverne falder ud, Lærerne er det i lige saa høj Grad. Grunden er naturligvis den, at de matematiske Opgaver byder paa større Overraskelser end f. Eks. Opgaverne i Dansk Stil.

I Almindelighed maa man sige, at de Opgaver, der gives til Eksamen, er gode og solide; men det hænder ogsaa, at

Digitized by Google

de springer i Øjnene enten paa Grund af deres forbløffende Lethed eller deres urimelige Vanskelighed, og hvad værre er, man undgaar ikke nu og da at se Opgaver ved Mellemskole- og Realeksamen, der indeholder dunkle Punkter.

Man vil kunne indvende herimod, at hvad der falder let for den ene, kan falde svært for den anden, selv om de er lige dygtige, og heri kan man have nogen Ret; men man vil vanskeligt kunne hævde, at hvad der er klart og naturligt for den ene, kan være dunkelt og kunstigt for den anden, naar ellers Anlæggene for Regning og Matematik er ens.

Hvorledes bør Opgaverne da være?

Lad os tage Opgaver til Mellemskoleeksamen og Realeksamen hver for sig.

A. Regneopgaver til Mellemskoleeksamen.

Ifølge Lov om højere Almenskoler af $^{24}/_{4}$ 1903 sluttes Mellemskolen med en *Aarsprøve*. Denne bliver for nogle en *Afgangsprøve*, for andre en *Oprykningsprøve* til Realklassen eller til Gymnasiet. Der maa i Eksamensfordringerne tages Hensyn til denne Dobbelthed, endskønt den kun for de færreste bliver en Afgangsprøve.

Som Afgangsprøve betragtet bør Fordringerne i Regning have en afsluttende Karakter, og Opgaverne bør være af en saadan Art, at Eleven kan faa Lejlighed til at vise, at han kan løse saadanne jævne, naturlige og praktiske Opgaver, som Livet vil kunne stille ham over for, og at han i Behandlingen af Tal har den Færdighed, som fornuftige Chefer vil kræve, naar han træder ud i praktisk Virksomhed.

I *Procentregning og Rentesregning* maa kræves, at Eleven kan løse fremadgaaende Opgaver og Opgaver, hvor Procenten søges; tilbagegaaende Opgaver bør ikke spille nogen dominerende Rolle, men kun gives som underordnede Spørgsmaal.

I *Forholdsregning* maa han kunne løse alle naturlige Opgaver i enkelt og sammensat — ligefremt og omvendt — Forhold, som f. Eks. at finde Prisen paa et Vareparti, naar Prisen paa et andet er opgivet; dog bør man ikke give Regning med omvendte Tal uden i de allersimpleste Former. I Regning med *fremmed Mønt og Maal* maa han kunne omsætte det fremmede til dansk Mønt og Maal.

Digitized by Google

I *Delingsregning* maa Eleven kunne løse Opgaver som: at fordele Arbejdslønnen mellem Arbejdere efter det Antal Dage eller Timer, hver har arbejdet, og i det hele taget at dele en Størrelse efter opgivne Forholdstal Der bør ikke gives Opgaver i at dele efter flere Sæt Forholdstal, uden disse let og naturligt af Eleven kan reduceres til eet Sæt, og Opgaver, der gaar ud paa at finde den Størrelse, der skal deles, altsaa tilbagegaaende Opgaver, bør være underordnede Spørgsmaal i skriftlige Opgaver.

I *Gennemsnitsregning* bør kun stilles ganske simple og fremadgaaende Opgaver som Hovedspørgsmaal, Opgaver, hvori Gennemsnittet søges. Tilbagegaaende Opgaver heri maa betragtes som matematiske Opgaver.

I *Areal- og Rumfangsberegning* og Regning med Vægtfylde bør Eleven være godt hjemme. Han maa være sikker i Omsætningerne i Metersystemet. Tilbagegaaende Opgaver heri, undtagen de simpleste Former, maa betragtes som matematiske Opgaver.

I *Regning med Værdipapirer* bør der kun kræves, at Eleven kan løse fremadgaaende Opgaver. Hovedspørgsmaalet i disse bør gaa ud paa at skrive Købs- eller Salgsregning. I Regning med Obligationer bør man i Opgaver holde sig til, at Rentekuponen for den løbende Termin medfølger ved Køb og Salg, og i Regning med Veksler bør man udelukkende holde sig til den ene Form for Veksler: Sola-Vekslen.

Holder man sig indenfor den her skitserede Ramme for praktisk Regning til Mellemskoleeksamen, vil Opgaverne ikke give nogen væsentlige Overraskelser, der vil da over den daglige Undervisning komme mere Tryghed og Ro, og der vil kunne lægges større Vægt paa Talbehandling og Regnefærdighed end nu sker, og ved Eksamen vil der kunne bydes Eleverne saa betydelige Opgaver, at de ved Løsningen vil kunne vise deres Regnefærdighed eller blotte deres Mangler paa dette vigtige Punkt.

Enhver Eksamensopgave bør indledes med Spørgsmaal, som enhver, selv de daarlige Regnere, kan besvare; først i Slutningen maa de Spørgsmaal stilles, som kun kan ventes besvarede af de dygtigste. Hvad Formen angaar, bør de naturligvis være affattede saa klart, at Eleverne ved, hvad der skal

Digitized by Google

regnes, og at der ingen Misforstaaelser finder Sted, og sammensatte Opgaver bør være udstykkede i flere Spørgsmaal.

Af Opgavesæt i Regning, der er givet til Mellemskoleeksamen, og som jeg regner for gode, vil jeg fremdrage følgende tre:

I. Juni 1914.

1) En Mand køber et rektangulært Grundareal 20 m langt og $17\frac{1}{2}$ m bredt for 40 Kr. pr. m^2. Omkostningerne ved Handelen er 803 Kr. Hvor meget skal han betale ialt?

For at skaffe dette Beløb sælger han Aktier lydende paa 8000 Kr. til Kurs $91\frac{1}{2}$. Hvor meget indbringer disse Aktier, og hvor stor en Sum maa han yderligere tilskyde?

Han sælger dernæst Grundarealet, saaledes at han tjener 15 %. Find Salgsprisen.

2) Et Parti Byg paa 756 hl sælges for 7257,60 Kr., et andet Parti paa 975 Tdr. sælges for 10 842 Kr. Find Forholdet mellem Priserne pr. hl af det første og det andet Parti. 1 Td. = 1,39 hl.

Dette Opgavesæt er efter min Mening ideelt baade hvad Form, Omfang og Sværhed angaar.

I Opgave 1 bydes paa forskellige Beregninger inden for, hvad man maa kræve ved denne Eksamen: Fladers Beregning, Salg af Værdipapirer, Procentregning. Tallene er smaa i denne Opgave, saa paa dette Punkt volder den ingen større Vanskeligheder, men Eleverne kan uforstyrret af Tallene faa Lejlighed til at vise, om de er hjemme i disse Beregninger. Til Lettelse af Løsningen er Opgaven paa naturlig Maade udstykket i tre Spørgsmaal, hvad der maa kaldes ideelt, og det første Spørgsmaal er saa let, at det maa kunne regnes selv af meget smaa Regnemestre.

I Opgave 2, som er ganske enkel, bydes paa store Tal, saa ogsaa denne Side af Regnekunsten kommer til sin Ret.

II. September 1915.

1) A sælger et Parti Aktier lydende paa 2200 Kr. til Kurs 105, og B et Parti Aktier lydende paa 3750 Kr. til Kurs 84; hvor meget indbringer disse Aktier?

For den indkomne Sum køber A og B i Forening et Parti Varer, der senere sælges med en Fortjeneste af $16\frac{2}{3}$ %. Af Fortjenesten faar A først $\frac{1}{5}$ for at have afsluttet Forretningen, hvorefter Resten af Fortjenesten fordeles mellem A og B i Forhold til deres kontante Indskud. Hvor meget faar A og B hver af Fortjenesten?

2) En cylindrisk Beholder, hvis Dybde er 17 cm, og hvis indvendige Diameter er 4,2 cm, er halvt fyldt med Vand; hvor mange Kubikcentimeter

Digitized by Google

Vand indeholder Beholderen? — En Blykugles Diameter er 2,1 cm; hvor mange Kubikcentimeter er dens Rumfang? — Hvor mange Millimeter stiger Vandet, naar Kuglen lægges ned i Beholderen?
(Cylinderens Rumfang er $\frac{11}{14} \cdot h\ d^2$; Kuglens Rumfang er $\frac{11}{21} \cdot d^3$.)

Opgavesættet er vel omfangsrigt, men Opgaverne er hver for sig udmærkede, især er Nr. 1 en god Opgave.

Opgave 1 byder paa tre forskellige, hver for sig vigtige Beregninger: Salg af Aktier, Procentregning og Delingsregning. Tallene er bekvemme. Denne fortrinlige Opgave vilde dog have vundet, hvis der havde været indskudt Spørgsmaalet: Hvor meget udgør Fortjenesten?

Opgave 2 vil vel nok falde mange Elever svær, som de fleste Rumfangsopgaver gør, naar lige undtages Beregning af Rumfang af Kasse, men den i saadanne Opgaver sædvanligt forekommende Vanskelighed, at Længdemaalene er angivet i forskellige Enheder, er udelukket her; Maalene er angivet i de samme Enheder. Besvarelsen af de to første Spørgsmaal kræver derfor egentlig kun, at Eleven kan indsætte Tal i en Formel og derpaa regne løs; tredie Spørgsmaal kræver derimod en Del Omtanke og mere Færdighed i at løse en Formel.

Hvis Opgave Nr. 2 var erstattet med en mindre sammensat, mindre omfangsrig Opgave, men en Opgave, der bød paa større Tal, tror jeg, Sættet vilde have vundet derved.

III. Januar 1913.

1) Et rektangulært Stykke Jord, der er 875 m langt og 798 m bredt er købt for 95 000 Kr., hvor mange Øre bliver det pr. m^2? Ved et Skel vinkelret paa den længste Side af Jordstykket skal dette deles i to Stykker, hvoraf det mindste Stykke skal være 20 ha; hvor skal Skellet sættes?
(Resultatet i Meter med 1 Decimal.)

2) A og B driver i Forening en Forretning, i hvilken deres Parter forholder sig som 3 til 4. Forretningen havde i Aaret 1900 en Omsætning af 121 800 Kr., hvoraf $13\frac{1}{3}$ % var Fortjeneste. Hvor meget heraf fik A, hvor meget B? Fortjenesten var $19\frac{1}{3}$ % af Driftskapitalen; hvor stor var denne? A betalte i Skat af sin Fortjeneste 591,60 Kr.; hvor mange pCt. var det?

Opgave 1 er en lille fiks Opgave, som baade byder paa at vise Færdighed i Regning med større Tal og paa Tænksomhed. Da Opgaven giver Anledning til Tegning, bør den tiltale enhver; ogsaa derved, at det sidste Spørgsmaal ikke simpelthen kan besvares med et Tal, bliver Opgaven tiltalende.

Opgave 2 er god, for saa vidt som der bydes paa forskel-

Digitized by Google

ligartede Ting: paa alm. Procentberegning, paa Deling efter Forholdstal, paa tilbagegaaende Procentregning og paa at finde Procenten. Jeg er dog bange for, at der for de mindre opvakte straks dukker noget fremmed op i Ordet »Omsætning«; de ved ikke, hvad Omsætning er. Og for dem, der ikke er grundmurede i det danske Sprog, frembyder der sig en Vanskelighed i Ordet »heraf«. Hvor mange lader ikke dette gaa paa Omsætning ligesom »hvoraf« i foregaaende Sætning. En Eksamensopgave bør redigeres saa tydeligt, at ingen Misforstaaelser kan finde Sted.

Opgavesættet synes jeg ellers som Helhed er passende i Omfang og Sværhed.

I det følgende skal jeg derefter fremdrage et Opgavesæt, der formentligt er for omfangsrigt, et Opgavesæt, der synes vel tyndt, og et Sæt, der helt gaar over Hovedet for de jævne og ringe.

I. Marts 1914.

1) Arealet af en kvadratisk Plads er 7612,5625 m^2.
   a) Hvor meget koster den, naar den købes for 64 Øre pr. m^2?
   b) Hvor lange er Siderne?
   c) Et Hegn om Pladsen koster 1361,10 Kr.; hvor meget bliver det pr. Meter?
   d) Hvor mange Kvadratalen er Pladsen? 1 Al. = 0,63 m.

2) A paatager sig et Arbejde, som han skal aflevere færdigt om 3 Maaneder, og straks efter Afleveringen skal han have Betalingen derfor 4200 Kr. Dette Arbejde udfører han dels selv og dels ved Hjælp af 17 Mand i 37 Dage og 15 Drenge i 23 Dage; han betaler $3\frac{1}{2}$ Kr. i Dagløn til en Mand og $\frac{2}{5}$ deraf til en Dreng; desuden giver han for Materiale og til andre Udgifter saa meget som $\frac{3}{7}$ af hele Arbejdslønnen. Til Afholdelse af alle disse Udgifter laaner han ved Arbejdets Begyndelse for en Tid af 3 Maaneder 3880 Kr. til 5 % p. a. Da Arbejdet til rette Tid var færdigt, fik han sine Penge for det og betalte sit Laan med Renter. Hvor meget tjente A ved dette Arbejde?

Dette Opgavesæt turde være vel omfangsrigt; alene den lange Tekst, som fylder $^1/_2$ Side i en Regnebog, bringer straks Blodet op i Kinderne paa de ængstelige Eksaminander.

Opgave 1 er dog en rigtig god Opgave. I denne, som maa regnes til de sværere Opgaver, faar Eleven Lejlighed til at vise, om han kan tumle med ret store Tal i forskellige Regningsarter, i Multiplikation, i Kvadratrodsuddragning og i Division. Men der bydes ogsaa rigeligt for Forstanden. For at kunne

Digitized by Google

besvare andet, tredie og fjerde Spørgsmaal, maa Eleven være fuldt fortrolig med Areal og Omkreds af Kvadrat, hvad der ogsaa maa forlanges. Første Spørgsmaal kræver saa godt som intet, hvad Omtanke angaar, og kan derfor løses af alle, der blot har en Smule Færdighed i Multiplikation af hele Tal.

Opgave 2, den lange Opgave, burde være en rigtig god, praktisk Opgave, men desværre kan der tvistes om, hvorledes et Punkt deri skal forstaas. Da jeg ved paagældende Eksamen læste den igennem, faldt jeg straks over Ordene »dels selv«, men fik snart klaret Meningen derhen, at da A selv arbejdede med, maatte vi af Hensyn til Beregning af Udgifter til Materiale og andre Udgifter regne med Arbejdsløn til 18 Mand. Det viste sig, at Flertallet af mine Elever havde regnet med 17 Mand og saaledes helt ladet Bemærkningen »dels selv« ude af Betragtning; kun mine dygtigste Elever havde ligesom jeg regnet »dels selv« for en Oplysning og regnet med 18 Mand. Flertallet har jo altid Ret, og det fik de ogsaa her. Censor dømte Eleverne med de 18 Mand til Karakteren 5 (alt det øvrige i samtlige Eksamensopgaver, Matematik saa vel som Regning, var rigtigt), Eleverne med de 17 Mand til Karakteren 6. Det Aar vilde jeg have faaet Karakteren 5 i skriftlig Regning og Matematik til Mellemskoleeksamen.

II. Marts 1918.

1) Regnskabet for 1916 i en Bank, hvis Aktiekapital er 200000 Kr., udviste et Overskud paa 74213.50 Kr. Heraf blev 23600 Kr. henlagt til Reservefonden, 16000 Kr. udbetaltes til Aktionærerne, og 10146 Kr. overførtes til Regnskabet for 1917, medens Bestyrelsen fik Resten af Overskuddet i Tantième.

Hvor mange pCt. af Aktiekapitalen udgjorde Aktionærernes Udbytte, hvor mange pCt. af Overskuddet?

Hvor mange pCt. af Aktiekapitalen udgjorde Bestyrelsens Tantième, hvor mange pCt. af Overskuddet?

Alle Resultaterne angives med 2 Decimaler.

2) En Mester paatog sig et Arbejde, som han beregnede at kunne udføre ved 8 Mand i 27 Dage. Arbejdet paabegyndtes med 9 Mand; men efter $8\frac{1}{2}$ Dags Forløb forlod 3 af dem Arbejdet, og først $3\frac{1}{4}$ Dag derefter kom der 2 Mand til.

Hvor mange Dage varede Arbejdet ialt?

Dette Sæt Opgaver synes ikke at byde Eleverne tilstrækkeligt; det er passende for de jævne Elever, men de flinke faar ikke Lejlighed til at vise, hvad de magter.

Digitized by Google

Opgave 1 er meget ensidig; i alle fire Spørgsmaal søges Procenten. Hvor let kunde Spørgsmaalene ikke have været varieret, saa der først var en almindelig Procentberegning, saa et Spørgsmaal i at finde Procenten og til sidst maaske et tilbagegaaende Spørgsmaal. Saa vilde der have været noget for alle, for de smaa, de jævne og de flinke Regnere. Som Opgaven er, kan den alene vise Talbehandling. Hvis en Elev slutter fejl i det første Spørgsmaal, maa han, hvis han er konsekvent, gøre det i alle fire.

Opgave 2 er ogsaa ganske enkel. Saadan en gammel Traver som denne Opgave findes i alle Regnebøger, og den kan enhver blot nogenlunde jævn Regner med Lethed løse. Den kunde have været udvidet f. Eks. med et Spørgsmaal om Arbejdsløn eller Timeløn. Derved vilde der være kommet et Moment ind, der kunde have krævet baade Omtanke og Talbehandling.

III. Januar 1909.

1) En Købmand sælger et Vareparti saaledes, at han paa de $\frac{2}{3}$ af Indkøbsprisen tjener 25 pCt. og paa Resten af Indkøbsprisen taber 5 pCt. Hvor stor har hans Indkøbspris været, naar der ved den Del af Salget, som giver Fortjeneste, kommer 917 Kr. 60 Øre mere ind end ved den Del af det, der giver Tab.

2) I de engelske Postsparekasser udgjorde Indskydernes Tilgodehavende Aar 1900: 145 549 645 £, fordelt paa 8 439 983 Konti, og Aar 1907: 157 500 077 £, fordelt paa 10 692 555 Konti. — Beregn: 1) den gennemsnitlige aarlige Tilvækst af Indskydernes Tilgodehavende i det angivne 7aarige Tidsrum; 2) den gennemsnitlige Størrelse af hver Konto Aar 1900 og Aar 1907. — Resultaterne skal angives i £, sh. og d. med Nøjagtigheden 1 d. — 1 £ = 20 sh. à 12 d.

Jeg mener, at dette Opgavesæt er for svært, at det kun er for de gode Hoveder og de rutinerede Regnere, at de jævne kun vil faa lidt ud af Sættet og de smaa Regnere intet.

Opgave 1 maa betragtes som en matematisk Opgave; man vil sætte Opgaven i Ligning og løse denne. For de dygtigste vil dette næppe volde stor Vanskelighed, anderledes med de jævne og ringe, og for dem bliver der da intet at tage fat paa. En saadan Opgave burde ikke forekomme blandt Opgaverne i praktisk Regning.

Opgave 2 er en kedelig Opgave; man har paa Forhaand Ulyst til at gaa i Gang med den. Det er ganske vist en praktisk Regneopgave, men den hører hjemme paa et mere udviklet Trin; den kræver en Talbehandling, som kun kan-

Digitized by Google

ventes af de dygtigste Regnere. Spørgsmaal 1 kunde vel nok til Nød regnes af de jævne, hvis de blot forstod, hvad Opgaven krævede. Sætningen: »Beregn den gennemsnitlige aarlige Tilvækst af Indskydernes Tilgodehavende i det angivne 7-aarige Tidsrum« er en Sammenhobning af Ord, hvis Mening gaar over Hovederne paa Eleverne. Men andet Spørgsmaal kan de da slet ikke magte; Talbehandlingen er for svær og omfattende.

Af og til er der til Mellemskoleeksamen givet en uvirkelig eller kunstig Regneopgave; og der er ogsaa givet Opgaver, der indeholder Dunkelheder, hvad jeg allerede har paapeget. Jeg skal nævne fire Eksempler paa saadanne Opgaver:

Eks. 1. September 1908.

Et Værelse er $5\frac{1}{4}$ Alen højt, $7\frac{3}{4}$ Alen langt og 8 Alen dybt; der er 2 Fag Vinduer, som er 3 Alen høje og 7 Kvarter brede, 2 Døre, som er $3\frac{3}{4}$ Alen høje og 2 Alen brede, samt en Kakkelovnsplads paa $12\frac{3}{8}$ Kvadratalen. Hvormeget koster det at lade dette Værelse tapetsere med Tapet til 1,25 Kr. Stykket, naar hvert Stykke er $13\frac{1}{2}$ Alen langt og 3 Kvarter bredt, og naar Tapetsereren tager 40 Øre for Opsætningen af hvert Stykke. Der kan kun købes hele Stykker Tapet.

Opgaven er vist tænkt at skulle løses saaledes: Man udregner et Tapetstykkes Areal; udregner Væggenes Areal og fradrager Arealet af Vinduer, Døre og Kakkelovnsplads; dividerer derpaa det udkomne Arealtal med Arealtallet for et Tapetstykke, runder opad i Kvotienten og faar Antallet af Tapetstykker; og multiplicerer sluttelig 1,65 Kr. med Tapetstykkernes Antal.

Men Opgaven er uvirkelig, først fordi der ikke er taget Fodpanel i Betragtning, og dernæst af følgende Grund: Tapetstykker bliver altid af Tapetsereren skaaret ud i hele Baner, der kan naa fra Loft til Fodpanel; Mønsteret paa en Tapetbane skal jo passe sammen med Mønsteret paa Nabostykkerne, og det gaar ikke an at lappe Stykker sammen paa en Bane. Af et Stykke Tapet som det, der omtales i Opgaven, kan der saaledes kun blive 2 Baner; de Stumper Tapet, der falder fra af Stykkerne, anvendes under Vinduer, over Døre og lignende Steder. En Tapetserer vilde altsaa udregne Antallet af Tapetstykker paa en hel anden Maade.

Eks. 2. Marts 1917.

A, B, C og D overtager i Forening et Arbejde, som A alene kunde udføre i 80 Dage, B i 84 Dage, C i 90 Dage og D i 96 Dage. A ar-

Digitized by Google

bejder paa det i 25 Dage, B i 21 Dage, C i 15 Dage, og D gør det derefter færdigt. Hvor mange Dage er han om det?

Naar Betalingen for hele Arbejdet er 504 Kr., hvor meget tjener saa hver af Deltagerne i Dagløn og hvor meget ialt?

Denne Opgave er en kunstig Opgave, som kun har lidet med det praktiske Liv at gøre. Hvem regner i Virkeligheden med saadanne Opgivelser for Arbejdsevnen, og hvor faar man disse Opgivelser fra? Hvorledes lader de sig udmaale? Saadanne Opgivelser vilde ikke holde Stik i det praktiske Liv, og Facit vilde uden Tvivl komme til at se helt anderledes ud end Facit paa dette Regnestykke.

Opgaver af denne Art findes ganske vist endnu i Regnebøgerne som en Overlevering fra ældre Tid, og de holdes der i Live ved, at saadanne Opgaver nu og da serveres som Eksamensopgaver, medens de helt burde forsvinde under den Form.

Opgaven faar kun et praktisk Tilsnit derved, at der til sidst bliver en Betaling for Arbejdet at dele. Men hvorledes skal den deles? Er Daglønnen ens eller forskellig for de fire Arbejdere? Enten er et Arbejde Akkordarbejde og hver Arbejder opmaaler sit Arbejde og faar sin Betaling efter det udførte, eller ogsaa er det Dag- eller Timelønsarbejde, og hver Arbejder faar Betaling efter den Tid, han har arbejdet. Paa alle Arbejdspladser vilde man regne med ens Dagløn, naar Arbejdet er en Fællesakkord, og altsaa dele Betalingen efter Dagetal alene. Men der har ikke været Enighed blandt Censorerne om, at denne Betragtning skulde anses for forsvarlig, og Tallene i Opgaven tyder ogsaa paa, at der ved Betalingens Fordeling skulde tages Hensyn til den opgivne Arbejdsevne.

Eks. 3. Juni 1916.

En Haandværksmester skal udføre et Arbejde; han beregner, at Materialet vil koste 5200 Kr., og at Arbejdslønnen vil blive 2758 Kr., hvorefter han tillægger 14 % som sin personlige Fortjeneste. Hvor meget maa han forlange for Arbejdet, idet Summen afrundes til nærmeste Antal hele Kroner?

Arbejdet lader han udføre af 6 Svende, som arbejder i 82 Dage for en Dagløn af 5,50 Kr., og af 4 Lærlinge, som arbejder i 74 Dage for en Dagløn af 75 Øre. Under Udførelsen af Arbejdet viser det sig, at han sparer $\frac{1}{13}$ af Materialet, men samtidig er Prisen paa dette steget 7 %. Hvor store bliver hans samlede Udgifter, og hvor mange pCt. tjener han, naar han faar den forlangte Sum?

Digitized by Google

Denne i øvrigt gode Opgave har et for mange Elever dunkelt Punkt: Han tillægger 14%, men af hvad? Der burde udtrykkeligt staa »14% af disse Beløb« eller »14% af Udgifterne til Materiale og Arbejdsløn«. Der er ingen Grund til at lægge en saadan Vanskelighed ind i Opgaven, hvad der vel heller ikke er gjort med Hensigt.

Eks. 4. Juni 1913.

En Mand arver 15928 Kr. efter sin Fader; i Arveafgift fragaar $2\frac{1}{4}$ pCt. og til andre Omkostninger $1\frac{3}{4}$ pCt. af Arven. Det Beløb, der derefter tilkommer ham, faar han udbetalt 1 Maaned før Terminen, og han køber straks sytten 3 pCt.'s Statsobligationer (med vedhængende Rentekuponer) à 1000 Kr. til Kurs 87; Kurtagen er 0,1 pCt. af Obligationernes Kursværdi. Hvor meget bliver der da til Rest af Arven?

I Opgaven burde Terminsdagene og Købsdagen udtrykkelig og direkte være opgivne. Den Form, hvorunder Tidsrummet for Renteberegningen er angivet, »1 Maaned før Terminen«, er ikke heldig, da den forleder Eleverne til at beregne Renten for den omtalte Maaned.

Regneopgaver, der af Eleverne kun kan løses gennem Ligning, og som i deres Tilsnit maa anses for matematiske Opgaver, er givet et Par Gange i Regneopgavesættet til Mellemskoleeksamen, i Juni 1907 og Januar 1909. Det var ønskeligt, om saadanne Opgaver maatte blive henlagt til Sættet i Matematik.

B. Matematiske Opgaver til Mellemskoleeksamen.

Færdigheden i at løse matematiske Opgaver spiller i Almindelighed kun en lille Rolle for det praktiske Liv. Naturligvis kan Løsningen af en praktisk Opgave kræve, at man kan løse en simpel Ligning eller indsætte Tal i en given Formel, men i Almindelighed har Matematikken som Fag for dem, der forlader Skolen med Mellemskoleeksamen, alene sin Berettigelse som forstandsudviklende Fag.

Men Mellemskoleeksamen er ogsaa en Oprykningsprøve til Gymnasiet og Realklassen. Fordringerne i Regning til denne Eksamen behøver ikke af den Grund at gaa uden for den ovenfor skitserede Ramme.

Den videregaaende Regning hører hjemme i Realklassen

Digitized by Google

og i Gymnasiet. Men Matematikken i Mellemskolen maa af Hensyn til Elevernes Fortsættelse i Gymnasiet dyrkes med de videre Maal for Øje.

Grænserne for, hvad der kan kræves i geometriske Opgaver, er her ret nøje og hensigtsmæssig afstukne, saa man vanskeligt kan komme ud i Uføre, selv om de nok er saa rummelige, at de kan give Plads for Vanskeligheder, der overstiger, hvad man kan vente sig af flinke Elever. Men i Aritmetik er der ganske godt Spillerum indenfor Fordringernes Grænser, og dette har ogsaa nu og da præget Eksamensopgaverne paa den Maade, at der er givet for vanskelige Opgaver.

De fleste Opgavesæt i Matematik, der er givet til Eksamen, er gode, solide Sæt, men jeg skal dog pege paa enkelte Sæt, som der kan være noget at indvende imod.

I. Januar 1916.

1) Afsæt paa en ret Linie tre Punkter A, B og C i Rækkefølge, saa at $AB = \frac{3}{5} BC$, og konstruer dernæst en retvinklet Trekant, hvori AC er Hypotenusen og B dennes Skæringspunkt med den rette Vinkels Halveringslinie.

2) Find x, y og z af Ligningerne

$$4x + 5y = 58,$$
$$11y - 6z = 36,$$
$$9x + 7z = 98.$$

Konstruktionsopgaven er efter min Mening saa svær, at det vilde være et helt Træf om nogen Elev kunde løse den. I Mellemskolen lægger man jo Hovedvægten paa at kunne konstruere løs ved Anvendelsen af de geometriske Steder, men stiller ikke saa store Fordringer til indirekte Løsning.

I denne Opgave ligger Tyngdepunktet ikke i Konstruktionen, men i Undersøgelsen af Prøvefigur, og denne Undersøgelse vil kun faa Elever paa egen Haand faa et Resultat af.

3 Ligninger med 3 ubekendte skal Eleverne kunne løse; men Opgaven maa betragtes som en af de sværere aritmetiske Opgaver, idet man kun kan faa Tid til at øve faa saadanne Opgaver.

Sættet som Helhed er alt for svært, de jævne og ringe vil intet faa ud deraf.

II. Juni 1910.

1) Tegn en Cirkel med vilkaarlig Radius, og konstruer derefter et Trapez, der er omskrevet om Cirklen, og i hvilket to af Vinklerne er 60° og 45°.

Digitized by Google

2) Den ene Side i et Rektangel er 3 cm længere end den anden, og Arealet er 70 cm^2. Find Siderne.

Konstruktionsopgaven er af jævn Sværhed, er ikke videre sammensat og gøres færdig i ret kort Tid. Men den aritmetiske Opgave er urimelig let og løses af jævnt gode Regnere paa et Øjeblik. Et saadant Opgavesæt byder ikke tilstrækkeligt. At de ringe Matematikere ikke kan gøre meget ved det, forhøjer naturligvis ikke Sættet i Værdi.

III. Juni 1917.

1) Konstruer et Trapez *ABCD*, der kan indskrives i en Cirkel, naar *AB* skal være 3 cm, *AC* 4 cm og *AD* 5 cm. — Træk derefter Trapezets anden Diagonal og Forbindelseslinier mellem de parallele Siders Midtpunkter.

2) Find x af Ligningen

$$\frac{x+2}{x^2-1}+\frac{3x-1}{4x+4}-\frac{2x-3}{3x-3}=\frac{35}{36}$$

I Konstruktionsopgavens Tekst er der den Mangel, at det ikke er opgivet, hvilke Sider, der er parallele. Har en Elev paa sin Prøvefigur ladet AB og CD være de parallele Sider, vil han enten ingen Vegne komme eller ogsaa faa en uantagelig Løsning. Og kun de færreste har Omtanke nok til at forlade deres første Prøvefigur, naar de ellers har lagt Stykkerne derpaa rigtigt.

Hvad de to sidste Linjer, som Opgaven forlanger skal trækkes, skal være til, er der ingen Elev, der kan begribe. At den sidste af disse to Linjer er bestemt ved Centrum for den omskrevne Cirkel og Diagonalernes Skæringspunkt, vil man vel ikke forlange, at Eleverne skal benytte, blandt andet af den Grund, at Cirklen ikke forlanges tegnet. Som Kontrol er disse Linjer ikke meget bevendt, Trapezets omskrevne Cirkel vilde have været bedre i dette Øjemed, da AD bliver Diameter.

Ligningen er en af de sværeste, der er givet til Mellemskoleeksamen. Løsningen bliver kun mulig, hvis Eleven finder paa og kan opløse Nævnerne i Faktorer for at skaffe Fællesnævner. Gør han ikke det, kommer han ind paa Regninger, der hurtigt vokser ham over Hovedet.

Dette Sæt er meget for svært.

Af enkelte Opgaver, som jeg finder staar paa Grænsen af, hvad man bør forlange i Retning af Sværhed, skal jeg fremdrage følgende to aritmetiske Opgaver:

Digitized by Google

Juni 1907.

Find x af Ligningen

$$\frac{57x - 74}{18x - 12} - \frac{3x - 5}{6x - 4} + \frac{2(x + 5)}{9x - 6} = 2\tfrac{1}{6}x.$$

Juli 1908.

Find x af Ligningen

$$\frac{33}{x^2 - 9} - \frac{9}{2x + 6} - \frac{3}{2x - 6} = \tfrac{3}{4}.$$

Saadanne bør, ligesom Opgaven fra Juni, kun gives i Forbindelse med en geometrisk Opgave, der er jævn og ligetil, hvilket ogsaa maa siges at have været Tilfældet med ovenanførte to Opgaver.

Absolut for svære er følgende Opgaver:

I. Januar 1911.

Reducer Udtrykket

$$[(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2 - (a - b + c)^2 + (a + b - c)^2] : 8c,$$

og beregn det for $a = \sqrt{12\tfrac{1}{2}}$, $b = 0{,}4$, $c = \sqrt{2}$.

II. September 1915.

Konstruer en Trekant med Siderne a, b og c saaledes, at

$$\frac{a}{1\tfrac{1}{3}} = \frac{b}{2} = \frac{c}{2\tfrac{1}{2}}$$

og $$a + b + c = k,$$

hvor k er det nedenfor opgivne Liniestykke.

III. Januar 1913.

I en retvinklet Trekant er Hypotenusen $(a + b)$ cm og den ene Katete $(a - b)$ cm; find den anden Katete, Højden og de Stykker, hvori denne deler Hypotenusen, udtrykte ved a og b. — Beregn dernæst de fundne Udtryk for $a = 243$ og $b = 27$.

I. er for svær, idet det vil være en Sjældenhed, om nogen her benytter sig af Sætningen: *Differensen mellem to Tals Kvadrater er lig Tallenes Sum gange Tallenes Differens.* Eleverne vil regne løs, udføre Potensopløftningerne først, og Opgavens Løsning vil drukne i Udregninger; indløber der en Fejl, vil Eleverne vanskeligt kunne føre Løsningen til Ende.

II. har ikke meget Præg af Konstruktionsopgave, og Tyngdepunktet er heller ikke lagt paa Konstruktionen. Eleverne faar straks det Indtryk, at der først skal løses 3 Ligninger med 3 ubekendte. Kun for dem, der er særlig godt hjemme i

Digitized by Google

Lærebogen, vil det dukke op, at de her staar over for Opgaven: At dele et givet Liniestykke efter opgivne Tal. Opgaven burde være formet saaledes: »Del dette Liniestykke i 3 Dele, *a*, *b* og *c*, der forholder sig som $1\frac{1}{2}$ til 2 til $2\frac{1}{2}$. Konstruer dernæst en Trekant, hvis Sider er *a*, *b* og *c*.« Under denne Form vilde Opgaven have passet for Mellemskoleelever.

III. er en aritmetisk Opgave, som bygger for stærkt paa Sætninger fra Geometrien. Hvis Eleven stadig anvender den pythagoræiske Læresætning, hvad der er Anledning til, vil Beregningerne vokse ham over Hovedet. Hvilken Elev har saa megen Omtanke, at han forsøger at finde en lettere Vej, naar der ligger en naturlig Vej aaben for ham.

Hermed skal jeg lade det være nok med Mellemskole-Eksamensopgaverne.

Mellemskolen er jo en Børneskole og Mellemskoleeksamen en Aarsprøve, der kan betragtes som en Afslutning paa Børneskolen eller en Oprykningsprøve til en højere Undervisning. Men den er ingen Modenhedsprøve, ingen Embedseksamen, giver ikke særlig Adgang til nogen offentlig Stilling. Man tør derfor nok til denne Eksamen være forsigtig i sine Krav til Omtanke. Til daglig kan man variere Kravene efter Elevernes Evner og Behov, men til Eksamen maa man være varsom med at byde paa Overraskelser; man skal jo nødig tage Modet fra de unge.

Lad os ved Eksamen blive fri for »hitte-paa-Opgaverne« og i Stedet faa Opgaver, der byder alle Elever rigeligt at tage fat paa inden for de Omraader, man lægger Hovedvægten paa i den daglige Undervisning.

(Sluttes.)

Litteraturanmeldelser.

Henrik E. Flindt: Lærebog i Regning, en Udvikling af Regnekunstens Grundsætninger. København 1895. Lehmann & Stage. (Gyldendal.) (Anmeldt af cand. mag. *Viggo Bredsdorff*. Stenhus.)

Naar Redaktionen har bedt mig anmelde dette lille Skrift, hvis Fremkomst gik ret upaaagtet hen, er det sikkert ud fra

den Betragtning, at det har Bud til flere end dem, til hvem det naturligt henvender sig, nemlig Folke- og Almueskolens Lærerkreds.

Men ogsaa indenfor Mellemskolens og Gymnasiets Lærere kan der vel nu og da trænges til en Opstrammer, en Fornyelse i Behandlingen af Regneundervisningen, og Værdien ved dette Skrift er netop den, at man vækkes til Overvejelse overfor Spørgsmaal, der let forsvinder i Dagens Vane og Rutine, men som her er rejst paa en ny og forfriskende Maade.

En af de Ting, Forfatteren vil, er at paavise, at: »al Regning er Sammentælling. Hver ny Regningsart betegner derfor en Lettelse eller en Vinding af Plads eller Tid«.

Her kan jo i Virkeligheden kun Brug vise, om Forfatterens Fremgangsmaade er rigtig, men ved Læsning virker den overbevisende, og selve Tanken er det nok værd at lægge sig paa Hjærte og gøre til Ledetraad i sin Gennemgang af Stoffet.

Værdifuld er den Stilling, som Forf. giver Decimalbrøker, nemlig som en naturlig Udvidelse af vort Talbegreb med Tusinder, Hundreder, Tiere, Enere, Tiendedele, Hundrededele o. s. v.

Den Plads, man i Regning almindeligvis giver Decimalbrøk, nemlig som en Specialgruppe af almindelig Brøk, kan jo nok teoretisk forsvares, men det er min Erfaring, at Eleverne altid stejler overfor dette ny Brøkbegreb, der jo dog ikke er en Brøk, og at de nu har svært ved at se og forstaa, at Regnereglerne virkelig er en Gentagelse af dem, de lærte ved hele Tal.

Saadan vrimler Bogen af nye og gode Idéer, store og smaa, som man gør sig en Glæde af at opnotere under Læsningen; men for ikke at foregribe Nydelsen for Læseren, skal jeg her blot omtale to.

Den første er en tidlig Indøvelse i Brug af Ligninger. Her vender Forfatteren sig vist især mod vore Seminarier, hvor man i den Grad frygter Ligninger, at man hellere fylder en Tavle med Tal og en Hjerne med Systemer end skrider til den Lettelse, som ligger i dette: man kalder den søgte Størrelse x.

De, der har prøvet allerede i 2. Mellemskoleklasse at indføre Ligninger, vil vide, at det gaar lettere, end man paa Forhaand turde vente.

Digitized by Google

Den anden er Forfatterens Gennemgang af Logaritmer. Ja, for det første har Forfatteren under de tidligere Afsnit indsmuglet to Regneregler, som Eleverne nu høster Fordel af. Det ene er Omskrivningen af f. Eks. — 3,7581 til 0,2419 — 4.

Det andet er Interpolationen, der paa den nydeligste Maade præsenterer sig i Proportionsligningerne. Alene herved er opnaaet, at der ikke under selve Logaritmebelæringen er ophobet saa mange nye og forvirrende Kunstgreb, at Eleven ikke faar klart Begreb om nogen af dem.

Selve Logaritmetavlens Brug glider saa ind blot som en naturlig Udvidelse af Potensregning, thi idet man lærer Potenssætningerne ser man let, at hvis alle Tal kunde omskrives til Potenser af samme Rod, saa vilde Multiplikation og Division reduceres til Addition og Subtraktion.

Og uden Højtideligheder med Definitioner og Sætninger o. s. v. føres man naturligt ind paa Logaritmetavlens Betydning og Brug, og jeg tvivler ikke paa, at Eleverne vil gøre Bevægelsen med langt lettere, end det nu sker, saaledes som Problemet almindeligvis behandles.

Gennem hele Bogen taler Forfatteren for endnu en Sag, der ligger ham meget paa Hjærte. Det er Sprogrensningsproblemet i Regning og Matematik Naturligvis henvender Bogen sig her mest til vor Folkeskole, men som Udviklingen inden for Skolen synes at gaa, var det maaske nok værd ogsaa for andre at tage dette Spørgsmaal op til Behandling, navnlig da flere af vore nye Lærebøger saavel i Regning som Matematik synes at ville fastslaa, at vi har danske Benævnelser.

Spørgsmaalet trænger til at debatteres netop af Mellemskolens og Gymnasiets Lærerkræfter, for hvis der skal gennemføres en Sprogrensning og Sprogfornyelse, saa skal og bør den ikke præges af Tilfældighed, med et daarligt Ord hist og et værre her, men saa maa der vrages og vælges, til det bedste er fundet, og endvidere bør den bedste Form autoriseres og følges op gennem Gymnasiet; thi der er jo ingen Grund til i disse Fag at skabe en lignende Benævnelsesforvirring som paa det grammatiske Omraade ved Overgangen fra Mellemskolen til Gymnasiet.

Forfatteren har fundet mange heldige Udtryk, og han har gennemført Rensningen konsekvent. saa vidt, at han erstatter S ø j l e med Stolpe og R æ k k e for Billedets Skyld med

Digitized by Google

Bjælke; men skulde der blive Tale om en konsekvent Gennemførelse, saa er dette Skrift en rig Kilde.

Meningen med disse Linier skulde gærne være den: ikke at give en udtømmende Gennemgang og Kritik, men hos Læseren at vække saa megen Interesse, at han ikke lader sig nøje med dette ringe Uddrag, men gaar til selve Bogen, som det ikke er nogen Herregaard at anskaffe.

De Skoler, der er saa lykkelige at have et Haandbibliotek, bør straks anskaffe Bogen.

* * *

Tidsskrift för elementär Matematik, Fysik och Kemi, utgiven af Ad. Meyer, Otto Gallander, J. S. Hedström, G. Starck. Första Årgången. 1917—18.

Stockholm. Albert Bonniers Förlag.

Af dette ny Tidsskrift foreligger nu første Aargang afsluttet, og vi ønsker vore svenske Kolleger til Lykke med at have gennemført den — og uden at slaa af paa de Løfter, der blev givet ved første Heftes Fremkomst — trods alle de Vanskeligheder, som de høje Konjunkturer under og umiddelbart efter Verdenskrigen sikkert har beredt dem. Det er et Tidsskrift, som bør være kendt og udbredt ogsaa her i Landet; denne første Aargang byder adskilligt, som er af Værdi, særlig for Lærere ved Seminarierne og de højere Skoler.

Tidsskrift f. e. M. F. K. stiller sig det Maal at bringe de Fremskridt, der indenfor disse Fag sker paa den nyere Forsknings Omraade, frem for Lærerne og de Studerende i en saadan Form, at de let kan tilegnes. Det vil følge de Traditioner, som blev skabt ved Tidsskrift för Matematik och Fysik, der under Redaktion af G. Dillner, Fr. W. Hultman og T. R. Thalén udkom 1868—71. Og dette udmærkede Tidsskrift er nok værd at tage til Mønster. Alligevel er der den paafaldende og store Forskel, at Fysiken og Kemien har faaet en meget fremtrædende Plads i det ny Tidsskrift; men dette er jo en naturlig Følge af den Stilling, disse Fag nu har faaet i Skolen. Ved at drage en Sammenligning mellem de to Tidsskrifter, faar man en Forestilling om, hvilken betydelig Udvikling, der har fundet Sted for disse Fags Vedkommende gennem det sidste halve Hundrede Aar.

Jeg skal give et kort Overblik over Indholdet af denne

Digitized by Google

Aargang. Paa Matematikens Omraade lægger Tidsskriftets Hovedredaktør, *Lektor* Ad. Meyer, for med en Afhandling i 1. Hefte om *Multiplikationsbegreppet i dess tillämpning på dimensionslären*, der fortsættes i 3. Hefte. Det er to Afhandlinger, som vil læses med Udbytte af Matematiklærerne. Jeg vil ogsaa henlede Gymnasielærernes Opmærksomhed paa en Note af samme Forfatter om *Læren om Maxima og Minima*, hvor det anbefales i Gymnasiet at benytte Fortegnet for $f''(x)$ til Afgørelsen af, om der er Max. eller Min., naar $f'(x) = 0$.

Med megen Interesse læses ogsaa H. Petrinis Afhandling: *Om geometriens grunder enligt Hilbert och lektor Perssons avhandling därom*, E. Solanders *Om skäring mellan ett plan och en rät cirkulär cylinder eller konisk yta* og A. Lindhagens *Om ett par elementära aritmetiska funktioner.*

En anden af Tidsskriftets Redaktører, O. Gallander, har flere smukke Afhandlinger fra Fysikens Omraade; de omhandler Problemer af Elektricicetslæren med direkte Henblik paa Gymnasiet. Ogsaa T. E. Aurén, B. Beckmann, C. E. Blom, G. Forsström, A. Hansson, T. Moll og G. Witt behandler forskellige fysiske Spørgsmaal paa en saa klar og anskuelig Maade, at man let følger dem. I. Bolin skriver interessant om Fremskridtene paa den radioaktive Forsknings Omraade i 1915—16, og W. Hallström har en let tilgængelig Artikel om *Materiens byggnad.*

En tredje af Tidsskriftets Redaktører, G. Starck, paaviser i en længere Afhandling: *Försök till den teoretiska kemien,* den Indflydelse, den teoretiske Fysik i de sidste tre Tiaar har haft paa Undervisningen. Andre kemiske Problemer er behandlet af K. Holmberg.

Tidsskriftet bringer endvidere matematiske og fysiske Opgaver til Løsning.

Det vil føre for vidt at gaa nærmere ind paa Enkeltheder; men vi skal i Fremtiden referere og kommentere de enkelte Hefters Indhold, efterhaanden som de udkommer. Dog skal jeg endnu henlede Opmærksomheden paa en enkelt Afhandling. Det er A. Lemoine: *Den fysiska institutionen i Uppsala nya seminarium.* Denne Afhandling afgiver et tydeligt Vidnesbyrd om, hvor højt Seminarieundervisningen staar i Sverige. Det kan anbefales vore Seminariers Fysiklærere og dem, der interesserer sig for en Reform af vor Seminarieundervisning, at læse denne Artikel.

Digitized by Google

Jeg kan paa det varmeste anbefale dette Tidsskrift til danske Matematik- og Fysiklærere, det fortjener en vid Udbredelse ogsaa hos os. Det vil, idet Hovedvægten er lagt paa Fysiken og Kemien, supplere Matematisk Tidsskrift. Det bør findes i Haandbiblioteket ved alle vore Mellemskoler, Gymnasier og Seminarier. Prisen er saa ringe, at den ikke kan virke afskrækkende; men Lærerne maa selv være interesserede i, at det bliver anskaffet til Skolerne.

Vi haaber paa et godt Samarbejde med dette vore Broderlandes eneste elementære Tidsskrift for Matematik, Fysik og Kemi. Vi arbejder begge med det samme Maal for Øje: at vække Interesse og Lyst hos Matematik- og Fysiklærerne til stadig at vedligeholde Studiet af deres Fag, saa at de kan følge med i de Fremskridt, der netop i den Tid, vi staar i, finder Sted, ikke alene paa det videnskabelige, men ogsaa paa det pædagogiske Omraade. Det er kun gennem den Gensidighed, der fremkommer ved, at Lærerne tager imod det, der bydes dem gennem Tidsskrifterne, og ved at arbejde med, at der kan faas et virkeligt Resultat ud af det Arbejde, Tidsskrifterne har taget op. I. L. W. I.

Danske Eksamensopgaver.

Pigeskolens Faglærerindeeksamen.

Oktober 1918.

I.

1. Konstruer $\triangle ABC$ af $\angle A$ og de to Stykker, hvori Højden fra A deles af de andre Højder.

(Konstruktionen udføres med Passer og Lineal, og Opgaven diskuteres.)

2. Bevis, at en given Vinkel i Almindelighed ikke kan tredeles ved følgende Fremgangsmaade:

Med Vinklens Toppunkt som Centrum og vilkaarlig Radius tegnes en Cirkel, der skærer Vinklens Ben i A og B, over AB som Diameter tegnes en Halvcirkel, der tredeles, og Delingspunkterne forbindes med Vinklens Toppunkt.

Digitized by Google

II.

Der ønskes en Oversigt over Læren om Decimalbrøk, saaledes at de vigtigste Sætninger og Regneregler bevises og godtgøres; specielt behandles Omskrivningen af almindelig Brøk til Decimalbrøk og omvendt, samt tilnærmet Beregning ved Decimalbrøk.

III.

1. Søg det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem en Parabeltangent og den Linie, der gaar parallel med Aksen gennem det Punkt, hvori Ordinaten til Røringspunktet skærer Linien gennem Brændpunktet parallel med Tangenten.

2. Bevis, at i enhver Trekant ABC er:

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4R \sin A \sin B \sin C.$$

3. I en regulær firsidet Pyramide med Toppunkt O og Grundflade $ABCD$ har Grundfladens Kant Længden a og Sidekanten Længden b. Bestem den korteste Afstand mellem Kanterne OA og BC i Størrelse og Beliggenhed, og bestem Pyramidens Snit med en Plan vinkelret paa Midten af denne korteste Afstand i Form og Areal; bestem endelig Volumenerne af de to Dele, hvori dette Snit deler Pyramiden.

Resultater:

1. Det geometriske Sted bliver Ledelinien.
2. $a \cos A + b \cos B + c \cos C = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$
$= R(2 \sin(A+B)\cos(A-B) - 2\sin(A+B)\cos(A-B))$
$= 4R \sin A \sin B \sin C.$
3. Den søgte Afstand bliver $a\sqrt{\frac{4b^2 - 2a^2}{4b^2 - a^2}}$. Snittet bliver et ligebenet Trapez med Arealet $\frac{3a}{16}\sqrt{4b^2 - a^2}$. Den mindste Del bliver et Prismatoide med Volumen $\frac{5a^2}{24}\sqrt{4b^2 - a^2}$.

IV.

Ved Fastsættelsen af Foderrationer til Arbejdsheste inddeles disse efter Størrelsen i fire Klasser — I: Heste over 11 Kvarter, II: Heste mellem 10 og 11 Kvarter, III: Heste under 10 Kvarter og IV: Islandske Heste — og der tildeles hver Hest en bestemt daglig Ration Havre og Melassefoder. Havrerationen er ens for Kl. I og II, men er for Kl. III 1,5 kg mindre og for Kl. IV 1 kg mindre end for Kl. III. — Af Melasse faar en Hest af Kl. II og III lige meget og halvt saa meget som en af Kl. I, men dobbelt saa meget som en af Kl. IV.

Digitized by Google

A. Hvor store var disse Rationer, naar en Vognmand, der har: 4 Heste af Kl. I, 8 af Kl. II, 12 af Kl. III og 4 af Kl. IV, i September for dette Foder til dem har betalt ialt 923,40 Kr., og han har brugt 2,8 Gange saa megen Havre (regnet efter Vægt) som Melasse? — Prisen pr. 100 kg Havre eller Melasse er 27 Kr.

B. Hvis han i Oktober stadig har 28 Heste, deraf som før 4 af Kl. I, Resten dels af Kl. III, dels af Kl. IV, og hans Udgift til Foderet i hele Maaneden derved vil blive 778,41 Kr., hvor mange Heste af Kl. III og af Kl. IV maa han da have?

C. Hvis han derimod i Oktober forandrer sin oprindelige Hestebestand (fra Septbr.) derved, at han sælger nogle Heste af Kl. II og 3 Gange saa mange af Kl. III og i Stedet køber 2 Islændere for hver solgt Hest, vil han i hele Maaneden bruge 3565 kg Foder.

a) Hvor mange Islændere vil han i saa Fald faa?

b) Samtidig erstatter han forsøgsvis Melassefoderet med Blodmasse til 35 Kr. pr. 100 kg og Klid til 20 Kr. pr. 100 kg, og Udgiften til Foder i Oktober vil derved blive 943,95 Kr. — Hvor stor en Part af Melassefoderet erstattes med Klid?

D. For Resten af Aaret vil Vognmanden have 4 Heste af Kl. I, 6 af Kl. II og 8 af Kl. III; hvor mange Islændere maa han desuden have, for at den gennemsnitlige Havreration pr. Hest kan blive 2,82 kg daglig?

(Besvarelsen maa være saa udførlig, at Fremgangsmaaden træder klart frem, og Ligninger bør helst ikke anvendes ved Løsningen.)

Resultater:

A: I Kl.: 4 kg Havre, 2 kg. Melasse,
II » 4 » » , 1 » » ,
III » 2,5 » » , 1 » » ,
IV » 1,5 » » , 0,5 » » .

B: 14 Heste af Kl. III.
10 » » » IV

C. a) 20 Islændere,
b) $\frac{2}{3}$.

D: 7 Islændere.

Almindelig Forberedelseseksamen.

Oktober 1918.

Regning.

1. Et cylindrisk Kars indre Diameter er 11,54 cm, og det har en Højde paa 2,39 dm. Det er helt fyldt med Vand; hvor mange l*) indeholder det?

---

*) Der burde staa: Liter. Afkortelsen er uheldig, den kan virke vildledende

Digitized by Google

Et Stykke Jern paa 3 kg lægges ned i Vandet; hvor mange cm^3 Vand vil der løbe bort?

Jernstykket tages derpaa atter op; hvor højt, angivet i cm med 1 Decimal, vil Vandet nu staa i Karret?

En Cylinders Rumfang er $\pi r^2 h$, naar dens Højde er h. og Grundfladens Radius er r.

Jernets Vægtfylde er $7\frac{1}{3}$.

2. 3570 Kr. sættes paa Rente til 4 pCt. p. a. Find Kapitalens Størrelse efter 5 Aars Forløb.

Hvor længe skal 3570 Kr. staa paa Rente til 5 pCt. p. a. for at vokse til 4556 Kr.?

Hvor stor en Kapital vil i Løbet af 5 Aar vokse til 4986 Kr., naar den forrentes med $4\frac{1}{2}$ pCt. p. a.?

Der regnes overalt med Rente af Rente.

Resultater:

1. 2,5 l; 409,09 cm^3; 20 cm. — 2. 4344 Kr.; 5 Aar; 4001 Kr.

Aritmetik.

1. Find x og y af Ligningerne

$$x^2 + y^2 = 34$$
$$x + y - xy = 17.$$

2. Udfør Divisionen

$$(-6x^4 + 25x^3 + 58x^2 - 183x + 90) : (2x^2 - 13x + 15),$$

og opløs derefter Kvotienten i Faktorer.

3. Bevis, at den $(2p+1)^{te}$ Rod af Produktet af Leddene i en Kvotientrække med $(2p+1)$ Led er lig det midterste Led.

Resultater:

1.

x	5	-3	$+\sqrt{17}$	$-\sqrt{17}$
y	-3	5	$-\sqrt{17}$	$+\sqrt{17}$

2. Kvotienten bliver $-3x^2 - 7x + 6 = (x+3)(2-3x)$.

3. Man finder Produktet lig $(aq^{2p})^{2p+1}$, hvoraf Sætningen følger.

Geometri.

1. Der er givet to retvinklede Trekanter; konstruer et Kvadrat, hvis Areal er Differensen mellem Trekanternes Arealer.

Digitized by Google

2. I en ligebenet Trekant er Grundlinien 6 cm og Benene 5 cm.

Find Højderne og de Stykker, hvori de deler hinanden.

3. I en regulær Femkant *ABCDE* skærer Diagonalerne *AC* og *BD* hinanden i *O*. Bevis, at *O* deler hver af de to Diagonaler i to Stykker, af hvilke det største er Mellemproportionalen mellem hele Diagonalen og det mindste Stykke.

Resultater:

1. Kvadratsiden x konstrueres ved Hjælp af Ligningen $x^2 = \frac{ab}{2} - \frac{\alpha\beta}{2}$, hvor a og b er Kateterne i den største, α og β Kateterne i den mindste retvinklede Trekant.

2. Den ene Højde er 4 cm og de Stykker, hvori den deles 1,75 cm og 2,25 cm. De to andre Højder er 4,8 cm, de Stykker, hvori de deles 1,05 cm og 3,75 cm.

3. $\triangle BOC$ og $\triangle BCD$ bliver ligebenede og ligedannede, hvoraf Sætningen følger.

Almindelig Forberedelseseksamen.

Januar—Februar 1919.

Praktisk Regning.

1. Paa en 169 km lang Jernbane befordredes i et vist Tidsrum 37 Personer paa I. Klasse, 296 paa II. Klasse og 1887 paa III. Klasse. Priserne pr. Billet var henholdsvis 18,05 Kr., 11,70 Kr. og 6,45 Kr.

Hvor stort et Beløb indbragte Billetsalget?

Hvor stor var Indtægten ialt pr. km?

Hvor mange pCt. af Passagererne kørte paa I., II. og III. Klasse?

Hvor mange pCt. af den indkomne Sum hidrørte fra I., II., III. Klasse?

2. En Fabrikant købte 1000 Trisser Sygarn for 241,64 Kr. og solgte dem for 4 Kr. pr. Trisse. Hvor mange pCt. tjente han?

For denne Vareaager idømtes han senere en Bøde paa 5000 Kr. Hvor stort blev hans hele Tab?

3. En Stenkugle, hvis Vægtfylde er 2,71, vejer 357,5 kg. Beregn dens Radius udtrykt i cm, dens Overflade udtrykt i dm^2 og dens Rumfang i dm^3.

En Kugles Overflade er $4\pi r^2$ og dens Rumfang $\frac{4}{3}\pi r^3$, naar Radius $= r$.

Digitized by Google

Resultater:

1. 16302,20 Kr. — 96,46 Kr. — $1\frac{2}{3}$ %, $13\frac{1}{3}$ %, 85 %. — 4,10 %, 21,24 %, 74,66 %.
2. 1555,3 %. — 1241,64 Kr.
3. 31,58 cm, 125,3 dm^2, 131,9 dm^3.

Aritmetik.

1. Find x og y af Ligningerne

$$\frac{2{,}5y - 0{,}3}{0{,}7} - \frac{0{,}7x - 0{,}1}{1{,}1} = 0{,}9,$$

$$\frac{4{,}3x - 0{,}29}{0{,}5} + \frac{3{,}4y + 0{,}14}{0{,}3} = 10(x + y).$$

2. Find x af

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+11} - \sqrt{9x+1} = 0.$$

3. Find Værdien af

$$2x^3 - 13x^2 + 27x - 18$$

for $2x = 3$, og opløs dernæst Polynomiet i Faktorer af 1ste Grad.

Resultater:

1 $x = 0{,}3$, $y = 0{,}4$.
2. $x = 7$ er Rod i den forelagte Ligning. $x = \frac{2}{7}$ er Rod i Ligningen $-\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+11} - \sqrt{9x+1} = 0$.
3. 0. $(x - 2)(x - 2)(2x - 3)$.

Geometri.

1. I en Cirkel med given Radius r skal indskrives en Trekant ABC, hvori BC er given, og hvis Areal er lig Arealet af et Kvadrat med given Side k.

2. I Parallelogrammet $ABCD$ er $BC = 2\,AB$. Midtpunktet M af BC forbindes med A og D. Bevis, at AM og DM staar vinkelret paa hinanden.

3. I en Cirkel med Radius 2 cm er tegnet en Korde, hvis Afstand fra Centrum er 1 cm; hvor mange Grader er de Buer, hvori den deler Cirklen?

En anden Korde af samme Størrelse som den første tegnes vinkelret paa denne; find Gradeantallene af de 4 Buer, hvori Cirklen derved deles

Resultater:

3. 120^0, 240^0. — 30^0, 150^0, 90^0, 90^0.

Digitized by Google

Realeksamen.

Januar—Februar 1919.

Regning og Matematik.

1. En Mand købte en Gris for 25 Kr. og brugte til dens Opfodring 37,5 kg skummet Mælk à $10\frac{2}{3}$ Øre, 483 kg Valle og forskelligt Affald à $2\frac{2}{3}$ Øre, 1496 kg Roer à $2\frac{1}{2}$ Øre, 212 kg Byg à 26 Øre.

Da Grisen herefter vejede 105 kg, slagtede han den og fandt, at den efter Slagtningen vejede 84 kg.

Hvor meget kostede Grisen ham ialt, hvor meget pr. kg levende Vægt og hvor meget pr. kg slagtet Vægt?

Da Prisen paa en slagtet Gris samtidig var 2,25 Kr. pr. kg, hvor meget og hvor mange pCt. har Manden saa sparet ved selv at holde Gris?

2. En Købmand vil af 2 Sorter Te, som han køber for henholdsvis 6,25 Kr. og 3,75 Kr. pr. kg, lave 120 kg Blandingste à 5,25 Kr. Hvor mange kg maa han tage af hver Sort?

Find Udsalgsprisen pr. kg af denne Blanding, naar Teen ved Salget svinder 5 pCt., og Købmanden først tillægger 8 pCt. af Indkøbsprisen og derefter forhøjer den saaledes beregnede Pris pr. kg til det nærmeste Fold (Multiplum) af 5 Øre.

Hvor mange pCt. tjener Købmanden? (1 Decimal).

3. Find x og y af Ligningerne

$$x \cdot y = 28, \qquad 12 - x = \frac{15}{7 - y}.$$

Resultater:

1. 134,40 Kr., 1,28 Kr., 1,60 Kr. — 54,60 Kr., $28\frac{8}{9}$ %.
2. 72 kg, 48 kg. — 6 Kr. — 8,6 %.
3. $x = 6\frac{6}{7} \mid 7$
   $y = 4\frac{1}{12} \mid 4$.

Mellemskoleeksamen.

Januar—Februar 1919.

Regning.

D. 23. August sælger A følgende 3 Veksler:

1) 1 Veksel, der lyder paa 3240 Kr. og forfalder d. 29. September
2) 1 — — 2880 — — - 26. Oktober
3) 1 — — 1248 — — - 23. November

Digitized by Google

Hvor meget faar han udbetalt, naar Diskontoen er 6 pCt. p. a., og han skal give $\frac{1}{4}$ % af Vekslernes paalydende Værdi i Provision?

2. Et Stykke Linoleum, der er 4 Fod bredt og 80 Alen langt, er købt for 310 Kr.

For hvilken Pris pr. m^2 kan det sælges, naar der skal tjenes 24 pCt?

1 Alen = 2 Fod; 1 Fod = 31 cm.

Resultater:

1. 7281,18 Kr. 2. 6,25 Kr.

Matematik.

1. Konstruer et Parallelogram $ABCD$, idet $\angle A = 75^0$, Diagonalen $AC = 6$ cm, og Afstanden mellem AD og BC er 4 cm.

2. Find x og y af Ligningerne

$$\frac{5y-4}{8} - \frac{7x-1}{10} = 0, \qquad \frac{4x-6}{3} + \frac{3y+4}{4} = 6.$$

Resultater:

2. $x = 3$, $y = 4$.

Opgaver til Løsning.

1. Idet α, β og γ er Vinkler i en Trekant, skal man vise, at Ligningen

$$\sin^3 v = \sin(\alpha - v)\sin(\beta - v)\sin(\gamma - v)$$

tilfredsstilles af

$$\cot v = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} + \cot\alpha.$$

2. Til et Keglesnit drages to Tangenter med Røringspunkterne A og B. Ordinaterne i A og B skærer Tangenterne udenfor Keglesnittet i C og D. Bevis, at CD og AB skærer hinanden paa X-Axen (sædvanlig simpel Beliggenhed i et retvinklet Koordinatsystem).

3. I $\triangle ABC$ tegnes de udvendige Røringscirkler i $\angle A$ og $\angle C$ med Røringspunkterne M og N paa a (M mellem B og C). Find Vinklerne i $\triangle ABC$, naar $\triangle AMN$ er ligebenet og retvinklet.

(1—3 af A. M. Bunk).

Digitized by Google

4. Givet en stumpvinklet Trekant NMQ, hvor M er den stumpe Vinkel. Konstruer en Trekant ABC, saaledes at Højdernes Skæringspunkt falder i N, medens M og Q skal være de Punkter, hvori h_b og v_B skærer Trekant ABC's omskrevne Cirkel.

5. Givet en Halvcirkel med Radius r, dens Centrum O og dens Diameter AB. Der tegnes to Cirkelbuer, een med Centrum i B og Radius AB og een med Centrum i A og Radius AO. Find Radius i en Cirkel, der er indskreven i den Figur, der begrænses af Halvcirklen og de to sidst tegnede Cirkelbuer.

6. Bestem x af Ligningen

$$\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}+\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=x-\frac{a}{2}\cdot \qquad a>0.$$

7. Løs Ligningerne

$$x^2-(y-z)^2=a^2,$$
$$y^2-(z-x)^2=b^2,$$
$$z^2-(x-y)^2=c^2.$$

8. Find Summen af n Led af Rækken

$$1+5+11+19+29+\cdots$$

9. Eliminer v mellem Ligningerne

$$\frac{x}{a}=\cos v+\cos 2v, \qquad \frac{y}{b}=\sin v+\sin 2v,$$

10. I en Trekant ABC danner Længderne af c, b, a, h_c i den angivne Rækkefølge en Kvotientrække; find Vinklerne. (Eks. $\angle C=90^0$.)

Opgaver til Undervisningsbrug.

1. Find x af Ligningen

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5).$$

2. I et retvinklet Koordinatsystem har man givet Punkterne $A(a, 0)$ og $B(0, b)$. A_1 og B_1 er Projektionerne af A og B paa en vilkaarlig ret Linie gennem O. Find det geometriske Sted for Midtpunktet af A_1B_1, naar Linien drejer sig om O.

3. Givet Rektanglet $ABCD$. En ret Linie gennem A skærer CD i M og BC's Forlængelse i P, medens Q er Projektionen af P ned paa AD's Forlængelse. Konstruer Linien MP, naar $\angle MQP$ skal have en given Størrelse.

Digitized by Google

4. Bestem p og q saaledes, at Broken

$$\frac{x^2 + px + q}{x^2 - x + 1}$$

faar 3 til Maksimum og $\frac{1}{3}$ til Minimum.

5. Find x og y af Ligningerne

$$x + \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}.$$

6. Bevis, at naar a er et ulige Tal, er Udtrykket

$$a^4 - 3^4 + 18(3^2 - a^2) \text{ deleligt med } 64.$$

7. I en Firkant er to sammenstødende Sider hver 35 mm, og den Diagonal, som udgaar fra disse Sider er 56 mm. Diagonalen danner med Siderne Vinkler paa 55^0 og $64^0\,30'$. Beregn Firkantens Areal. Hvis Firkanten er Tegning i Maalestok 1 : 2000 af en Byggegrund, hvilken Værdi har da denne Grund beregnet efter 4,50 Kr. pr. 1 m^2?

8. To Elever i Realklassen vil maale Højden af en Fabriksskorsten, som ligger lige overfor Skolen. De afmærker i Skolegaarden tre Punkter A, B og C, som ligger paa ret Linie med Skorstenens Fod, saaledes at $AB = BC = 10$ m. Ved Hjælp af en Vinkelmaaler med Diopter*) udmaaler de derefter de Vinkler, under hvilke Skorstenens øverste Kant T ses fra A, B og C. De finder $\angle A = 50^0$, $\angle B = 41^0\,30'$ og $\angle C = 35^0$. De udfører en Tegning i Maalestokken 1 : 500 og bestemmer derefter Skorstenens Højde dels ved Udmaaling paa Tegningen, dels ved Beregning. Hvilket Maal faar de for Højden, naar de beregner den af $\triangle ATC$ og $\triangle BTC$ og tager et Gennemsnit af de to Tal? Den Elevs Øje, der maaler Vinklerne er 1,60 m over Jorden.

9. Bevis, at naar en Firkant deles i to ligestore Dele af den ene Diagonal, saa halverer denne den anden Diagonal.

10. En Sekskant er indskreven i en Cirkel. Bevis, at Summen af første, tredje, femte Vinkel er lig Summen af anden, fjerde og sjette Vinkel.

*) Jeg skal i et følgende Hefte af Tidsskriftet gøre Rede for et meget simpelt Apparat til Maaling af Højder og Azimuter, som jeg har anvendt i Realklassen. I. L. W. I.

Digitized by Google

Prisopgaver for 1919.

Matematisk Tidsskrift bringer for indeværende Aar to Prisopgaver, der begge er stillede af Professor *J. Hjelmslev.*

I.

Der ønskes en fuldstændig Undersøgelse af, hvilke Former en konveks Firkant kan have, naar den skal have mere end eet omskrevet Kvadrat og mere end eet indskrevet Kvadrat.

II.

De fire Kongruenssætninger og deres systematiske Betydning i ældre og nyere Lærebøger i Plangeometri.

Ved Besvarelsen af denne Opgave lægges Vægt paa en klar og overskuelig Fremstilling. Særligt Hensyn tages til Euklids Elementer, Legendre's Geometri og de vigtigste danske Lærebøger. Angaaende Emnets historiske Side kan henvises til *J. Tropfke:* Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung, Leipzig 1903.

Denne Opgave henvender sig særlig til yngre Matematiklærere.

Der udsættes for hver især af de to Opgaver følgende Præmier for de bedste Besvarelser:

1. Præmie: Nyt Tidsskrift for Matematik A 1890—1918.
2. Præmie: *H. G. Zeuthen:* Mathematikens Historie I—II (I) og *N. Nielsen:* Elementær Talteori (II).
3. og 4. Præmie: *J. Hjelmslev:* Geometriske Eksperimenter.

Besvarelser maa være indsendt til Redaktionen inden 1. Oktb. 1919. Kun Abonnenter paa Tidsskriftet kan deltage i Konkurrencen.

Til Tidsskriftets Læsere og Medarbejdere.

Efter sin Udnævnelse til Professor ved Universitetet i Kristiania har Professor *Poul Heegaard* overdraget Nyt Tidsskrift for Matematik til Matematisk Forening i København, som fra 1. Januar 1919 udgiver Tidsskriftet under Navn af Matematisk Tidsskrift. Tidsskriftet vil som hidtil udkomme i en elementær Afdeling A og en mere videnskabelig Afdeling B. Matematisk Forening har til Redaktører af Afdeling A valgt Magister *J. L. W. Jessen* og Adjunkt *O. A. Smith* og til Redaktører af Afdeling B Professor *T. Bonnesen* og Professor *H. Bohr.*

Digitized by Google

Studenterforeningen

Forbindelsen mellem Sider og Vinkler i en Trekant hos Grækerne før Trigonometriens Udvikling.

Af S. A. Christensen.

Man kan ikke vente dette Spørgsmaal optaget af Matematikerne, førend der blev praktisk Brug derfor, og det sker først hos Astronomerne, efter at de har begyndt at maale Vinkler for derigennem at søge Bestemmelse af Afstande.

Den første Opgave er egentlig den omvendte, af Linier at bestemme Vinkler, nemlig at finde Solhøjden af Skyggelængden maalt ved Gnomon, altsaa at finde Vinklen ved dens Tangens, men vi har intet Vidnesbyrd om en saadan Bestemmelse ved Regning. Imidlertid har man som Hjælpemiddel haft den grafiske Fremstilling, som sikkert er benyttet, og som ogsaa er benyttet i andre Tilfælde, f. Eks. sandsynligvis af Archimedes til Bestemmelse af Grænserne for Solens apparente Diameter i »Sandregning«.

Dog er den ældste Bestemmelse, vi kender, netop Grænsen af Tangens af en Vinkel, nemlig i *Euclids* Optik, Sætning 8 (Heiberg's Udgave af Euclids opera vol VII, men Sætn. 9 i Heiberg: Litterargeschichtliche Studien über Euclid). Sætningen siger kun, at »*ligestore parallele Linier synes ikke proportionale med Afstandene for Øjepunktet*«, en Udtryksmaade, der ikke dækker Indholdet og tilmed er ukorrekt. Euclid fører Beviset saaledes:

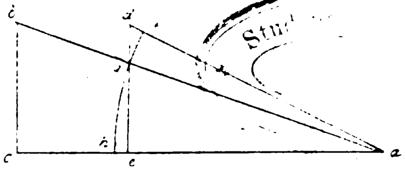


Fig. 1.

Eftersom $\triangle adg >$ Sekt agt og $\triangle agf <$ Sekt agh, saa er $\triangle adg$: Sekt $agf > \triangle age$: Sekt agh, hvoraf ved Ombytning $\triangle agd : \triangle age >$ Sekt agf : Sekt agh og ved Addition $\triangle ade : \triangle age >$ Sekt afh : Sekt agh, men $\triangle ade : \triangle age = de : gc = bc : ge = ac : ae$ og Sekt afh : Sekt $agh = \angle dag : \angle bac$, altsaa $ac : ae > \angle dae : \angle bac$, altsaa synes Linierne ikke proportionale med Afstandene.

For at være korrekt burde *Euclid* have sagt, at »Synsvinklerne er ikke omvendt proportionale med Afstandene«. Euklid fører i Virkeligheden Bevis for følgende Sætning, der anføres af Archimedes i »Sandregning« og anvendes af ham og som lyder:

»Naar i to retvinklede Trekanter de to Kateter er ligestore, men de andre uligestore, saa vil den største Vinkel ved de uligestore Kateter have et Forhold til den mindste, der er mindre end Forholdet mellem de uligestore Kateter«.

Hos Euclid findes ellers ikke Spørgsmaalet om Forbindelsen mellem Vinkler og Sider optaget til Behandling. Vi finder derimod hos *Aristarchos fra Samos* i hans Skrift »om Solens og Maanens Størrelse og Afstand« gennemført Anvendelsen af de Sætninger, der giver ham Grænsebestemmelserne for Liniernes Størrelse ved Vinklerne,

Han finder udtrykt i moderne Tegn i Sætning 4: $\mathrm{tg}\ 1^0 < \frac{1}{45}$, i Sætning 7: $\frac{1}{18} > \sin 3^0 > \frac{1}{20}$, i Sætning 11: $\frac{1}{45} > \sin 1 > \frac{1}{60}$, i Sætning 12: $1 > \cos 1^0\ (\sin 89^0) > \frac{89}{90}$, og i Sætning 13: $1 > \cos^2 1^0 > \frac{88}{90}$.

Braunmühl anfører i »Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie« fejlagtigt Sætningen: 8, 12, 13, 14 i Stedet for 7, 11, 12 og 13, endvidere begaar han den Fejl at sige, at Aristarchos i den sidste Sætning finder $\cos 1^0 > \frac{88}{90}$ i Stedet for $\cos^2 1^0$. Aristarchos finder nemlig $1 > \cos^2 1^0 > \frac{89^2}{90^2}$ og tager som Tilnærmelsesværdi $\frac{88}{90}$, der kan fremkomme simpelt saaledes:

$$\frac{89^2}{90^2} > \frac{89^2 - 1^2}{90^2} = \frac{88 \cdot 90}{90^2} = \frac{88}{90}.$$

De Sætninger, hvorpaa Aristarchos bygger, findes ikke bevist hos ham, der end ikke anfører Sætningerne. Derimod anfører *Archimedes* i Sandregningen følgende to Sætninger:

1. *Naar i to retvinklede Trekanter de to Kateter er ligestore, men de andre uligestore, saa vil den største Vinkel ved de uligestore Kateter have et Forhold til den mindste, der er større end Forholdet mellem Hypotenuserne* [Forholdet $\frac{\sin x}{x}$ aftager, naar Vinklen vokser]

2. *Naar i to retvinklede Trekanter de to Kateter er ligestore, men de andre uligestore, saa vil den største Vinkel ved de uligestore Kateter have et Forhold til den mindste, der er mindre end Forholdet mellem de uligestore Kateter* [Forholdet $\frac{\mathrm{tg}\ x}{x}$ vokser med Vinklen].

Digitized by Google

Det kan ikke med Sikkerhed afgøres, om Aristarchos har benyttet Sætn. 1, derimod fremgaar det klart af hans Tekst, at han har benyttet følgende Sætning, der er bevist af *Ptolemæus* i Almagest og af ham benyttet til Beregning af Kordetabeller. Sætningen lyder:

3. *I en Cirkel er Forholdet mellem en større Korde og en mindre mindre end Forholdet mellem de tilhørende Buer* (ikke over 180°).

Naar Archimedes nøjes med at anføre de to Sætninger uden Bevis, maa man være berettiget til at gaa ud fra, at de var bekendt paa hans Tid, og naar man kender hans strænge Fordringer til Bevisførelsen, maa man forudsætte, at han ogsaa kendte Beviserne for Sætningerne, medens vi intet véd om Aristarchos Fordringer i den Retning.

Aristarchos kendte selvfølgelig Beviset fra Euclids Optik for Sætning 2, der giver ham tg $1^0 < \frac{1}{45}$ i Sætn. 4.

Da Archimedes kendte Aristarchos Skrift, kendte han ogsaa Sætn. 3, og naar han ikke anfører den, skyldes det kun, at han ikke har Brug for den.

Det, der har Interesse, er at undersøge, hvorledes de nævnte Sætninger er opstaaet, og hvorledes de er bevist.

De to første Sætninger, der angaar retvinklede Trekanter, skyldes vel nok oprindelig de praktiske Tilfælde af Maaling, hvor man har benyttet den grafiske Fremstilling og naturligt søgt Forbindelse mellem Vinklerne og Siderne.

Beviset hos Euklid angaaende Synsvinklerne viser denne Opgaves Forbindelse med Opgaven at bestemme Solhøjden ved Gnomon, idet disse Opgaver kun er forskellige ved de forskellige Beliggenheder af de retvinklede Trekanter, og Euklids Sætning giver den Oplysning, at naar Skyggen af Gnomon vokser, aftager Solhøjden, men at Forholdet mellem Vinklerne (Solhøjderne) — den største til den mindste — er mindre end Forholdet mellem den største og den mindste Skygge.

Det synes at være naturligt derefter at stille Spørgsmaalet om en mulig Forbindelse mellem Vinklerne og Hypotenuserne, hvilket saa fører til Sætning 1, som først findes hos Archimedes.

Sætning 3 kendes først fra Aristarchos ovennævnte Skrift, og der er saaledes en Mulighed for, at den skyldes ham. Hans Anvendelser af den er oftest for det simple Tilfælde, at den ene Bue er et helt Antal Gange den anden — f. Eks. sammenligner han to Buer paa henholdsvis 60° og 2° —.

Digitized by Google

Afsættes den mindste Bue henad den største, vil han fra Elementerne vide, at den største Korde er et mindre Antal Gange den mindste end den største Bues Forhold til den mindste. Det falder da naturligt for ham at tænke, at Sætningen ogsaa maa gælde i andre Tilfælde og derefter søge et Bevis for dens Gyldighed. Om han har gjort dette sidste, véd vi ikke, men vi véd, at han bruger Sætningen i Tilfælde, hvor den store Bue ikke er et helt Antal Gange den lille, nemlig naar Buernes Forhold er 90 til 89.

Man maa formode, at disse tre Sætninger, der hænger saa nøje sammen, har været kendt og rugt i den aleksandrinske Skole, og at de ogsaa har været bevist, men hvorledes?

Fra senere Tider kender man Ptolemæus' Bevis for Sætning 3. Det synes, at han bygger paa Euclids Bevis for Sætn. 2, som det fremgaar af Beviset i Almagest, han benytter i alle Tilfælde samme Betragtningsmaade. Beviset er følgende:

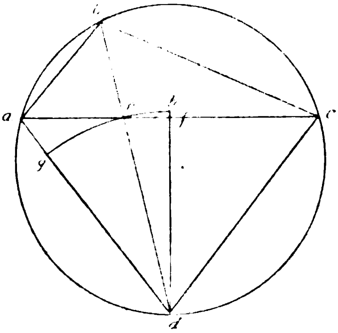


Fig. 2.

Buen bc er større end Buen ba. Vinklen mellem Korderne ba og bc halveres ved Linien bed, Linierne da og dc tegnes og ligeledes den vinkelrette df. Nu er $ce > ae$, $da > de > df$. Endvidere er (som hos Euclid) $\triangle aed >$ Sekt gde og $\triangle def <$ Sekt deh, hvoraf $\triangle def : \triangle dea <$ Sekt deh : Sekt deg, altsaa $fe : ea < \angle fde : \angle ade$ og $(da\ 2\,(ef + ea) : ea = ca : ea)$ $ca : ac < \angle cda : \angle adc$, men $ce : ae = bc : ab$ (den vinkelhalverende) og $\angle cde : \angle ade = \frown bc : \frown ab$, altsaa $cb : ba < \frown cb : \frown ba$. Indføres Vinklerne i Stedet for Buerne, faas $cb : ba < \angle bac : \angle bca$.

Hvis Ptolemæus yderligere havde trukket Højden fra b, havde han samtidig faaet bevist Sætn. 1, der i Virkeligheden ikke er forskellig fra denne. Ptolemæus Bevis er bygget paa saa simple, elementære og godt kendte Betragtninger, at der ikke er Grund til at tro, at der tidligere har foreligget andre selvstændige Beviser, saa hvis der har været ført et almindeligt Bevis for Sætningen indenfor den aleksandrinske Skole, har det rimeligvis været bygget paa de samme Betragtninger.

Digitized by Google

Imidlertid mangler vi fra Oldtiden Bevis for Sætn. 1, der som nævnt først er omtalt af Archimedes, og han har sikkert kendt et saadant Bevis, enten fremkommen af Sætn. 3 eller et selvstændigt.

Archimedes havde Betingelserne for at danne et selvstændigt Bevis, idet han dertil kunde bruge Postulat 2 af »Om Kugle og Cylinder I», der siger, at naar to Buer har samme Endepunkter og vender Hulheden til samme Side, er den yderste, den længste.

Man anbringer Trekanterne som Figuren viser, og Buerne, som hører til de omskrevne Cirkler, tegnes. Efter det anførte Postulat er $\frown bec > \frown bhc$. Det er bekendt, at Buernes Længde er proportional med Gradeantallet og med Diametren. Derfor vil den længste Bues Gradeantal, der er det største, have et Forhold til den mindste Bues Gradeantal, der er større end den største Diameter til den mindste Diameter (Hypotenuserne), og Vinklerne er proportionale med Gradeantallene, altsaa $\angle bgc : \angle bac > ab : bg$.

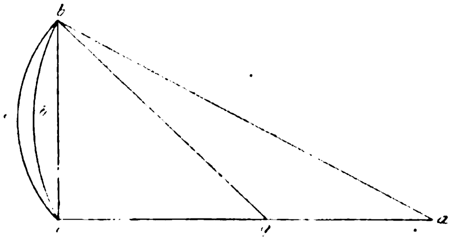


Fig. 3.

Ud fra dette Bevis for Sætn. 1 vilde man uden Vanskelighed have et Bevis for Sætn. 3, hvis man da ikke havde et selvstændigt Bevis.

Man vilde da have trukket Højden bc i Trekant abg, og man har efter det ovenstaaende $\angle bgc : \angle bac > ab : bg$ og $\angle bgc : \angle bac = \frown ba : \frown bg$, altsaa $\frown ba : \frown bg > ab : bg$. Hertil maa dog bemærkes, at dette kun gælder, forsaavidt den ene af Buerne ikke er 180°, og netop dette Tilfælde har Aristarchos Brug for, saa det maa bevises, at Sætningen ogsaa gælder i dette Tilfælde, selv om vi ikke véd, om Aristarchos stiller saa strenge Fordringer til Beviset, at han ikke nøjedes med at betragte dette Tilfælde som et Grænsetilfælde

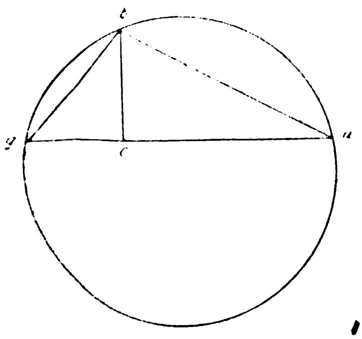


Fig. 4.

Digitized by Google

Af de to første Sætninger har man:

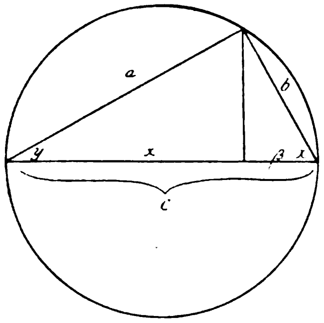


Fig. 5.

$$\frac{x}{y} > \frac{a}{b} \text{ og } \frac{x}{y} < \frac{\alpha}{\beta}.$$

Af den første Ulighed faas:

$$\frac{x+y}{y} > \frac{a+b}{b} > \frac{c}{b} \text{ ɔ: } \frac{90^0}{y} > \frac{c}{b},$$

og af den anden $\frac{y}{x} > \frac{\beta}{\alpha}$,

$$\frac{x+y}{x} > \frac{\beta+\alpha}{\alpha} = \frac{c}{\alpha} > \frac{c}{a} \text{ ɔ: } \frac{90^0}{x} > \frac{c}{a}.$$

Man anfører i Almindelighed som de ældste Beviser for Sætn. 1 og 2 de af *Commandinus* i hans Kommentar til Archimedes anførte Beviser, idet man overser Euclids Bevis.

Commandinus giver følgende Beviser:

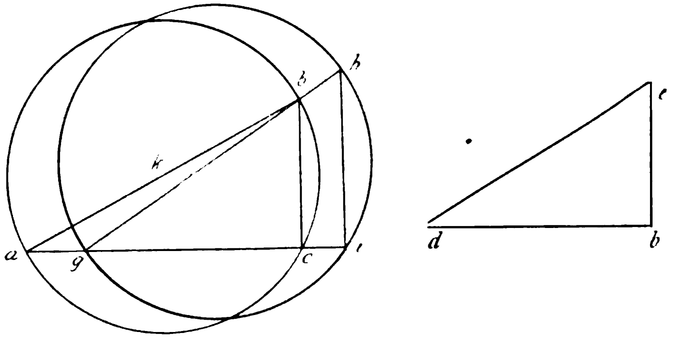


Fig. 6.

Er Trekanterne *abe* og *def* med de rette Vinkler ved *c* og *f* og Siden *bc* lig Siden *fe*, men $ac > df$, saa siger jeg, at $\angle\, edf$, som er større end $\angle\, bac$, har til denne Vinkel et Forhold, der er større end Siden *ba* til Siden *de*.

Paa Linien *ac* afsættes Stykket $cg = df$, *gb* trækkes og forlænges til *h*, saaledes at $gh = ab$, *ac* forlænges og fra *h* fældes den vinkelrette *hi*, der er parallel med *bc*. *ab* halveres i *k*, der bliver Centrum i Cirklen med Radius *ka* gennem *a*, *b* og *c*, ligeledes halveres *gh* i *l*, der bliver Centrum i Cirklen med Radius *lg* gennem *g*, *h* og *i*. Nu er Trekant *gbc* kongruent med Trekant *def* og Cirkel *abc* lig Cirkel *ghi*, da Diametrene er ligestore.

Digitized by Google

Nu forholder $\angle ghi$ sig til $\angle bac$ som $\frown hi$ til $\frown be$, men $\frown hi$'s Forhold til $\frown bc$ er større end Forholdet mellem Korderne hi og bc, eftersom Ptolemæus i I Bog af Almagest har bevist, at $\angle hgi$ til $\angle bac$ er større end hi til bc.

Paa Grund af ligedannede Trekanter er hi til bc som hg, der er lig ba, til bg, men bg er lig de, altsaa er $\angle hgi$, der er lig $\angle edf$, til $\angle hac$ større end ba til ed.

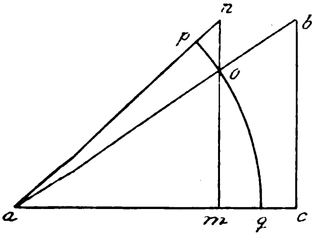


Fig. 7.

Nu afskæres igen af ae et Stykke am lig df og i Punktet a afsættes en Vinkel nam lig Vinkel fde og $an = de$, m og n forbindes med en Linie, der skærer ab i o, saa bliver Trekant nam kongruent med Trekant def. Med Centrum a og Radius ao tegnes Buen poq. Nu er Sekt aop : Sekt $aoq <$ Sekt $aop : \triangle aom$, men Sekt $apo : \triangle aom < \triangle ano : \triangle aom$, eftersom Sekt aqo er større end $\triangle aom$ og $\triangle aon$ større end Sekt aop, derfor er Sekt apo : Sekt $aqo < \triangle ano : \triangle amo$, men Sekt apo : Sekt aqo $= \angle nao : \angle oam$ og $\triangle ano : \triangle amo = no : mo$, altsaa $\angle nao :$ $\angle aom < no : mo$ og ved Addition $\angle nam : \angle oam < mn : om$ $= bc : om = ac : am = ac : df$, altsaa $\angle edf : \angle bac < ac : df$.

For Sætn. 1 reducerer Commandinus ved at forstørre den lille Trekant, saa de to Trekanters omskrevne Cirkler bliver ens, Opgaven, saa han kan bygge paa Ptolemæus Bevis for Sætn. 3. Det er altsaa ikke et selvstændigt Bevis, han faar for Sætn. 1.

Man kan undres over, naar han bygger paa Ptolemæus, at han ikke skaffer Trekanterne samme Cirkel blot ved at trække en Cirkel gennem a, g og b, eller endnu bedre ved at lægge Trekanten paa hver Side af den fælles Katete og saa tegne Cirklen gennem de tre frie Vinkelspidser.

Hans Fremgangsmaade forekommer mig mere kunstig end nødvendig, og den antyder, at han ikke har set, at de to Sætninger i Virkeligheden udsiger det samme. Man kan næppe antage, at Archimedes skulde have benyttet et saadant Bevis for Sætn. 1.

Commandinus Bevis for Sætn. 2 er, som en Sammenligning med Euclids udviser, i Virkeligheden det samme som Euclids. Skønt han kender Euclids Optik, som han citerer for en anden Sætnings Vedkommende, nævner han den ikke her; det synes

Digitized by Google

altsaa, som om han ikke har haft Øje for, at Beviset for Sætn. 8 i Optikken er Bevis for Sætn. 2.

Med Hensyn til Beviserne for de 3 her omtalte Sætninger tør man slutte, at man paa Aristarchos og Archimedes Tid, altsaa i den aleksandrinske Skole, har haft foruden Euclids Bevis for Sætning 2 et Bevis for Sætn. 3, der anvendtes af Astronomerne enten et fuldstændigt som Ptolemæus, idet denne som nævnt bygger paa saa kendte Betragtninger, at det kunde være kendt, eller et Sandsynlighedsbevis dannet ved Slutning fra de specielle Tilfælde, hvad jo er muligt man har nøjedes med.

Med Hensyn til Sætning 1, der anvendes af Archimedes, medens vi ikke véd, om Aristarchos har anvendt den, synes det unaturligt at antage Commandinus Bevis som eksisterende paa Archimedes Tid, baade fordi man ikke kan være sikker paa, at Ptolemæus Bevis for Sætn. 3 var kendt, og fordi, hvis det var kendt, man da sandsynligvis vilde have anvendt det direkte til at bevise Sætn. 1 ved Hjælp af Højden i Trekanten.

Der synes at være i alle Tilfælde en Mulighed for, at Archimedes har haft et selvstændigt Bevis for Sætn. 1, og at dette da har bygget paa det nævnte Postulat fra hans Værker.

De matematiske Opgaver ved Mellemskoleeksamen og Realeksamen.

En kritisk Vurdering.

Af Fr. Friis Petersen.

(Slutning.)

C. Opgaver ved Realeksamen.

I Realklassen bør Hovedvægten i det Fag, som hedder Regning og Matematik, lægges paa praktisk Regning, især Handelsregning. De unge Mennesker skal jo have et solidt, praktisk Grundlag at gaa ud med i det praktiske Liv, til Forretningerne, Bankerne og Kontorerne. Matematikken bør holdes nøje inden for de Grænser, som Anordningen kræver, for at der kan blive den mest mulige Tid til praktisk Regning.

Digitized by Google

Studenterforeningen

I Overensstemmelse hermed bør praktisk Regning dominere i Eksamensopgaverne, og det er der da ogsaa blevet en fast Praksis for, idet der i de senere Aar altid er givet 2 Regneopgaver og 1 matematisk Opgave til Realeksamen.

I et Sæt Eksamensopgaver bør Opgave 1 være en Opgave i *Handelsregning*, en Kalkulation, eller en anden Opgave, jævn og naturlig, hvor Emnet er hentet lige fra det praktiske, virkelige Liv. Den bør i det væsentlige byde paa fremadgaaende Regning, være godt udstykket i Spørgsmaal, der kan løses uden Brug af Regnetavler, og den maa give Lejlighed til at vise Regnefærdighed; Spørgsmaal i tilbagegaaende Regning maa staa sidst i Opgaven. Denne Opgave bør være Hovedopgaven.

Opgave 2 i et Eksamenssæt kan omhandle mere speciel Regning: *Regning med Værdipapirer*, *Simpel Rentesregning* (herunder Anvendelse af Rentetal og Rentedivisor), *Sammensat Rentesregning*, *Flade- og Rumfangsberegning*. I denne Opgave kan Regnetabellerne komme til Anvendelse.

Opgave 3 skal være en matematisk Opgave, ikke for omfattende, og i Almindelighed liggende inden for Omraaderne: *Ligninger*, *Regning med irrationale Tal*, *Differensrækker*, *Kvotientrækker*.

De Opgavesæt, som hidindtil er givet i Regning og Matematik til Realeksamen, falder i to Perioder; første Periode strækker sig fra Juni 1908 til Januar 1911, anden Periode fra Marts 1911 til Dato. Ser man de 10 Opgavesæt fra første Periode igennem, finder man, at 5 Sæt indeholder 2 Regneopgaver, 4 Sæt kun 1 Regneopgave, og 1 Sæt indeholder ingen reel Regneopgave (Maj 1910). I denne Periode har praktisk Regning aabenbart ikke spillet Hovedrollen (man huske paa, at den mundtlige Prøve overvejende bliver Prøve i Matematik). Men Udviklingen er gaaet i en heldig Retning.

I anden Periode (fra Marts 1911) har der i Opgavesættene regelmæssigt været 2 Opgaver i Regning og 1 Opgave i Matematik. Med Hensyn til den matematiske Opgaves Plads (Nummer) i Sættet er det siden Marts 1914 blevet en fast Regel, at den sættes som Nummer 3, medens den før den Tid skiftede Plads i Sættene. Man maa hilse Udviklingen med Tilfredshed. Men ogsaa Opgavernes Indhold er blevet mere og mere tilpasset efter Eksaminandernes Standpunkt og det praktiske Livs Fordringer; især siden Juni 1913 har vi haft mange udmærkede Eksamenssæt.

Digitized by Google

I det foregaaende har jeg om et Eksamenssæt udtalt, at det ingen reel Regneopgave indeholdt. Lad os undersøge det nærmere.

Maj 1910.

1) Find Radius i en Kugle, hvis Rumfang er 4 dm^3 17 cm^3 større end Rumfanget af en Cylinder, hvis Diameter er lig Kuglens Diameter, og hvis Højde er lig $1\frac{1}{6}$ Gange Kuglens Radius. — En Cylinders Rumfang er lig Grundfladen Gange Højden, en Kugles Rumfang = $\frac{4}{3}\pi r^3$.

2) Find Værdien af $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$.

3) En Veksel, hvis paalydende Værdi er saa mange Gange 100 Kr. som Diskontoprocenten p. a. angiver, diskonteres 2 Maaneder før Forfaldsdagen og indbringer Kr. 476,16. Find Diskontoprocenten og Vekslens paalydende Værdi.

Første Opgave skal stilles i Ligning:

$$\tfrac{4}{3} r^3 \pi - 4017 = r^2 \pi \cdot 1\tfrac{1}{6} r.$$

For at finde r skal man udføre en Kubikrodsuddragning, og dertil anvende Logaritmer. Opgaven som Helhed maa betragtes som en matematisk Opgave.

Tredje Opgave skal ligeledes stilles i Ligning:

$$100\,x - \frac{100\,x \cdot x \cdot 2}{100 \cdot 12} = 476{,}16.$$

Ligningen er kvadratisk. Ingen vil kalde denne Opgave en praktisk Regneopgave.

Et Par solide, praktiske Regneopgaver, hvor alle kunde have været med, vilde have været at foretrække.

Lad mig med det samme omtale 3 andre Sæt, som jeg finder er uheldige.

I. Juni 1910.

1) En Kapital giver et vist Antal Dage til 4 pCt p. a. Renten 18 Kr.; en anden Kapital, der er 300 Kr. større end den første, giver i et Antal Dage der er 45 mindre end det forrige, til samme Rentefod Renten 15 Kr. Find Kapitalerne og Dageantallene.

2) Beregn ved Anvendelse af Logaritmer Udtrykket

$$\sqrt{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}} \cdot \sqrt[4]{a^3 b^2 + 5a^2 b^3} \text{ for } a = 0{,}0135,\ b = 0{,}0173.$$

3) Salgsprisen for en Vare maa sættes til 1 Kr. 35 Øre pr. kg, for at der kan tjenes 50 pCt. Efter at $\frac{21}{40}$ af Varepartiet er solgt til denne Pris pr. kg, nedsættes Prisen pr. kg for Resten af Partiet med 20 pCt. Hvor mange pCt. kommer Fortjenesten ved *hele* Salget da til at udgøre?

Digitized by Google

Opgave Nr. 1 maa sættes i Ligning. Vi faar 2 Ligninger af anden Grad med 2 ubekendte:

$$\frac{x \cdot 4 \cdot y}{100 \cdot 360} = 18; \quad \frac{(x + 300) \cdot 4 \cdot (y - 45)}{100 \cdot 360} = 15.$$

Løsningen af disse giver megen Regning, men Opgaven er en ret svær matematisk Opgave.

Opgave Nr. 3 er egentlig en ganske fiks Opgave, selv om den ikke just kan kaldes praktisk. Den kræver ikke megen Talfærdighed, og Tallene er vel afpassede; men alligevel er den ikke noget for de mindre dygtige. Den begynder med tilbagegaaende Procentregning, hvad daarlige Regnere aldrig bliver fortrolig med. Dernæst skal Eleven hitte paa at vælge en Størrelse for Partiet (f. Eks. 40 kg); Procenten er jo uafhængig af Partiets Størrelse. Mange vil endelig slutte, at naar der tjenes 50 % paa første Del af Partiet, og Prisen dernæst nedsættes med 20 %, saa tjenes der 30 % paa Resten af Partiet; men dette er galt.

Opgave Nr. 2 er en svær matematisk Opgave for Realister; kun de bedste Matematikere vil faa noget ud af den.

Sættet maa af ovennævnte Grunde kaldes uheldigt; baade som Helhed og i Enkeltheder kan det kun løses af de dygtigste Elever.

II. September 1910.

1) En Købmand sælger Klæde til en Pris af 6 Kr. pr. Meter. Hvor mange sh og d har 1 Yard kostet i England, naar Omkostningerne var $12\frac{1}{2}$ pCt. og Fortjenesten 20 pCt. — 100 m = 109 Yards; 18,08 Kr. = 20 sh à 12 d.

2 Idet $p^2 = \frac{ab}{c^2}$, $q^2 = \frac{ac}{b^2}$, $r^2 = \frac{bc}{a^2}$, skal man beregne Værdien af Udtrykket

$$\frac{p^2}{q^2} + \frac{q^2}{r^2} + 3\tfrac{1}{2}pqr \text{ for } a = 0{,}5,\ b = 0{,}63,\ c = 0{,}4368.$$

3) En Kugle af Bronze, hvis Bestanddele Kobber og Tin udgør henholdsvis 95 pCt. og 5 pCt. af Kuglens Vægt, har en Diameter paa 15 cm og vejer $15\frac{1}{2}$ kg. Beregn med en Nøjagtighed af 1 cg Vægten af 1 cm^3 Bronze og af 1 cm^3 Kobber, naar Vægten af 1 cm^3 Tin er 7,3 g. — Volumen af en Kugle med Diameter d er $\frac{11}{21} d^3$.

Sættet mangler en solid fremadgaaende Regneopgave. Opgaverne er ikke vel egnede som praktiske Regneopgaver, der er intet at falde til Ro paa, men Sættet appellerer fra først til sidst til Omtanken.

Første Regneopgave er en lille nem Opgave for dem, der til Gavns er trænet i at løse Opgaver i tilbagegaaende Procentregning.

Digitized by Google

Sidste Opgave er derimod ikke nem; den er for urolig, man skal uafladelig springe fra det ene til det andet, fra Bronce til Kobber, fra Kobber til Tin, fra Tin til Bronce og fra Bronce til Kobber. Snart beregner man Rumfanget af et, snart Vægten af noget andet, snart Vægtfylden af noget tredje. — Man begynder med at beregne Kuglens Rumfang, springer derfra til at finde Kobberets og Tinnets Vægt, beregner saa Tinnets Rumfang og derefter Kobberets Rumfang, og man slutter saa med at beregne Kobberets og Broncens Vægtfylde.

Det er en morsom Opgave for dem, der kan jonglere med disse Begreber, men for de jævne er den en Lidelse.

III. Marts 1913.

1) A har til Gode

hos B Kr. 1187,93, der forfalder til Betaling d. 7. Maj.
» C » 691,35, » » » » » 1. Juni.
» D M. 1006,00, » » » » » 8. April.

B har til Gode

hos E Kr. 1893,32, der forfalder til Betaling d. 27. April.
» F frcs. 1202,50, » » » » » 30. Maj.

Den 12. Marts bytter A og B deres Fordringer, hvorved 112,50 M. ansættes til 100 Kr. og 100 frcs. til 72,25 Kr. Naar der af samtlige Fordringer beregnes Diskonto efter 6 % p. a., hvormeget skal A da have i Bytte af B, eller B af A?

2) Udtrykket $\dfrac{a^3 b^{-4} : (a^{-3} b^6)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a^{-2} b} : \sqrt[6]{a^5 b^2}}$ reduceres og beregnes for $a = 0{,}0009$.

3) Hvor mange dm maa Radius i en Kugle være, naar Kuglen skal have samme Rumfang som en Pyramidestub, hvis Grundflader er $\frac{19}{96}$ Kvadratyard og $\frac{18}{75}$ Kvadratyard, og hvis Højde er lig Kuglens Diameter? — Rumfanget af en Kugle med Radius r er udtrykt ved $4{,}188\, r^3$; Rumfanget af en Pyramidestub med Grundflade G og g, Højde h, er udtrykt ved $\frac{1}{3} h \left(G + g + \sqrt{Gg}\right)$. 1 Yard = 0,914 m.

Dette Opgavesæt er efter min Mening alt, alt for svært og omfattende.

Opgave 1 er meget omfattende. Den tager megen Tid, hvis da ikke Eleven finder paa at benytte Rentetalsmetoden, hvad han næppe gør, da der er Tale om Diskonto, og han vel kun har set Metoden benyttet ved alm. Renteberegning.

At der blandt A's Fordringer ogsaa er en paa B, som han jo bytter med, bidrager kun til at bringe Forvirring; adskillige Elever, og ikke af de daarligste, tager Hensyn hertil og benytter en sværere Fremgangsmaade end nødvendigt. En For-

Digitized by Google

dring paa B burde ikke have været opgivet blandt A's Fordringer.

At alene Ordet »Diskonto« betegner, at man her har med Veksler at gøre, er uheldigt; mangen en Eksaminand vil være tvivlende om, hvorvidt han skal behandle Beløbene som Vekselgæld eller som almindelig Gæld, om han skal regne med Diskontodage eller med Rentedage. Der burde straks i Opgaven være angivet, at man havde med Veksler at gøre.

Opgave 2 er den første Opgave, der er givet, hvor der skal manøvreres med negative og brudne Eksponenter, og den bliver forhaabentlig ogsaa den sidste. Naar man i Realklassens Pensum har medtaget et Afsnit herom, er det vel af Hensyn til Forstaaelsen af Logaritmeregningen, der følger efter. Men at opnaa Færdighed i at løse Opgaver som den foreliggende, det lykkes ikke i Realklassen, det er der dog ikke Tid til. Kun særlig flittige og velbegavede Elever vil kunne magte denne.

Opgave 3 kunde have været rigelig svær nok, selv om man ikke skulde omsætte Kvadratyards til Kvadratdecimeter. Det er en meget svær Opgave, ikke alene er der nok at gaa i Stykker paa ved Omsætningerne, men Tallene er saa store, at de vokser de fleste over Hovedet.

Med dette Opgavesæt er ogsaa Trængslernes Tid forbi. Fra nu af faar vi en Række udmærkede Eksamenssæt, hvor der lægges Vægt paa praktisk Regning; gode, naturlige, hovedsagelig fremadgaaende Opgaver, hvor de Elever, der virkelig kan regne de jævne Opgaver, Livet vil stille dem over for, ikke gaar helt i Stykker ved den skriftlige Prøve, fordi der i Opgavesættene ikke er lagt for store Sten i Vejen i Form af kunstige og snørklede Opgaver.

Man maa haabe, at det Spor, man er kommet ind i, vil blive fulgt i Fremtiden, og at det stadig maa holde Retningen.

Saalænge Regning og Matematik til Realeksamen optræder som eet Fag, og der gives en samlet Karakter deri, bør Regningen have Overvægten i Eksamensopgaverne; men Regning maa ogsaa være det vigtigste i den daglige Undervisning. Desværre gaar det saaledes, at i den daglige Undervisning er det Matematiken, der dominerer, medens Regning kun indrømmes en beskeden Plads, hvis man da ikke helt lever paa den i

Digitized by Google

Matematiken erhvervede Kundskab og Færdighed, blot suppleret med det ny tilkomne i Rentesregning.

Mon det overhovedet ikke kunde være værd at tage Spørgsmaalet om Deling af Regning og Matematik i to Fag (som ved Lærereksamen) op til Drøftelse, saa Regning kunde faa den Plads i Undervisningen, der med Rette tilkommer dette Fag, og Eksamensbeviserne udvise det Standpunkt, Eleverne staar paa i det for det praktiske Liv saa vigtige Fag: Regning.

Vink angaaende indledende regneundervisning.

Fra en udi de materier ikke praktisk forfaren.

Cifre og regnetegn skal snarere tegnes end skrives — jeg mener dermed, at man paa ethvert af de første trin maa forlange barnets fulde evne til at gengive tegnene *præcist* taget i anvendelse. Indtil formerne sidder børnene i fingrene, maa blyanten — hvis saadan benyttes — derfor vælges ret haard og gøres spids. Tegnene maa — til at begynde med — ikke gøres mindre end 12 mm i højden, senere efterhaanden mindre. Endvidere: stejl stilling!, hvoraf følgen naturligt maa blive, at tal, der skal skrives i lodrette rækker, ogsaa bliver det. Ingen kruseduller! Ingen støttepind til ét-tallet! Kun én skraa streg, nemlig nedstregen i »syv«, men den til gengæld meget skraa! Ovalerne i *Nul*, *seks*, *otte* og *ni* skal lukkes! Den vandrette streg i *fem* skal slutte til den lodrette!

Er talen om flercifrede tal, maa det paases, at cifrene faar ligestore mellemrum og skrives adskilte; fristelsen til forbindelsestegn er størst efter de tegn, der ender foroven, altsaa *Nul*, *fem*, *otte*; og farligst blandt disse — d. v. s. frembydende størst mulighed for fejllæsning — er *fem*.

Hvis ikke kvadreret tavle, papir eller underlag benyttes, hører en lineal med til enhvers udstyr i regnetimen. Den anvendes bl. a. forud for enhver addition eller subtraktion. Opgavens resultat stilles frit og understreges. De forskellige opgaver adskilles.

Hvor eleven kan løse opgaven »i hovedet«, maa øjeblikkelig nedskrivning ikke nægtes ham.

Digitized by Google

Ved forberedende øvelser med »runde« tal maa et forudgaaende skøn over antallet af cifre i produkt eller kvotient kunne underbygges. Ved addition og subtraktion er faren for fejl i den retning mindre. Navnlig naar opgaven er »iklædt«, maa eleven vænnes til at spørge sig selv, om der er mening i resultatet.

Det gælder i regneundervisningen som i trafikken, at selv om man sætter sig den største hastighed som maal, saa betaler det sig ikke at spare paa sikringsforanstaltningerne. Bedre end masseproduktion er selvkontrol. En sum af faa addender kontrolleres ved at tælle saavel fra neden som fra oven; er der mange, adderes 3 og 3 (tilsidst maaske 4 eller 2), idet de øvrige dækkes af papirstrimler; partialsummerne skrives efterhaanden ud ved siden og adderes til slut. En differens prøves ved addition af subtrahenden. Et produkt, navnlig af to tal med nogenlunde lige mange cifre, kontrolleres ved ombytning af faktorerne. (Senere kan læres hurtigere virkende kontrolmidler).

Paa den anden side maa man ikke lægge unødige baand paa den ivrige elevs fremdrift. Han maa aldrig være arbejdsløs. Fortæl klassen, at eet galt resultat sletter tre rigtige, og lad den mærke, at hver time giver anledning til optegnelser af læreren — paa en saadan maade naturligvis, at ikke en bestemt ende af klassen begunstiges. Det er et baand, som læreren vist er nødt til at paalægge sig — i desto højere grad, jo mindre han forud kender eleverne.

Efter et Foredrag om Regneundervisning, som jeg for et Aarstid siden holdt i Aarhus, sendte en Kollega ved Katedralskolen der, som tillige er Aktuar og som saadan meget forfaren i den Kunst at bruge Tal til praktisk Brug, mig ovenstaaende »*Vink*«.

Da jeg synes, de danner et vægtigt Indlæg i Spørgsmaalet Talskrivning og Regning med Tallene, har jeg bedt ham om Tilladelse til at lade dem komme frem her i Tidsskriftet, og han har givet mig denne, dog under den Betingelse, at jeg skulde ledsage dem med den Bemærkning: at de fra hans Side kun har været tænkte som Notitser til Brug for en bestemt Kollega. — Der trænges sikkert til en Reform paa Talskrivningens og den tekniske Regnings Omraade. Jeg vil yderligere henvise de Regnelærere, der interesserer sig for dette Spørgsmaal til Indledningen i I. P. Gram og A. Oppermanns Regnetavler I. L. W. I.

Digitized by Google

Literaturanmeldelser.

Erik Lundsgaard: Regnestokken. Kortfattet Vejledning til Indovelse i dens Brug. Jul. Gjellerups Forlag 1919. 28 S. (Anmeldt af Adjunkt *Chr. Jensen*, København).

Dette lille Hefte indeholder en klar og instruktiv Vejledning i Brugen at en Regnestok; blandt de mange Systemer, der foreligger, er valgt den hyppigt anvendte »Mannheim-Stok«. Der gøres ret detailleret Rede for, hvorledes man kan udføre de forskellige Regnearter ved Hjælp af Stokken, og Fremgangsmaaden illustreres stadig af Taleksempler. Forf drager til Felts imod den ældre Metode til Bestemmelse af Kommaets Plads — som endnu ofte anvendes — idet man igennem en Kontrolregning skønsvis bestemmer, hvormange Ciffre det søgte Tal vil faa; Metoden betegnes som tidsspildende og kan medføre Regnefejl. I Stedet anbefales og benyttes den tyske Ciffermetode.

Spørgsmaalet om Regnestokkens Anvendelse i Skolerne har af og til været drøftet, og enkelte Røster har lydt, som anbefalede dens Indførelse i Skoleundervisningen. Heroverfor maa det dog hævdes, at skal man med Fordel kunne bruge Regnestokken, er det nødvendigt, at de forskellige Indstillinger foretages hurtigt og med en Sikkerhed, som kun kan opnaas gennem en ikke helt ubetydelig Træning, og det er meget tvivlsomt, om den dertil anvendte Tid, som jo maatte tages fra Matematiktimerne, kan siges at være godt anvendt. Disse Timers Bestemmelse er, at de skal anvendes til Fordybelse i Lærestoffet og sikre Forstaaelsen af dette; det er i Skolen ikke saa meget selve Regnestykkets Facit, der er Hovedsagen, som de Veje ad hvilke det udvindes. Ligesaa fortrinligt et Hjælpemiddel Regnestokken kan være i tekniske Skoler og andre lignende Læreanstalter, ligesaa uheldig vil den virke i Skolerne ved at mekanisere Regningen i en Grad, som ikke er helt pædagogisk forsvarlig.

*

* *

Tidskrift för elementär Matematik, Fysik och Kemi, utgiven af Ad. Meyer, Otto Gallander, J. S. Hedstrøm, G. Starck. Andre Årgången, 1918—19. Första

Digitized by Google

Studenterforeningen

Häftet. Stockholm. Albert Bonniers Förlag. (Anmeldt af Adjunkt *Chr. Jensen*).

Af dette fortrinlige svenske Tidsskrift foreligger nu 2. Aargangs første Hefte, det indledes med en Afhandling af Nat. Lindskog om: En reciprocitet hos triangler. Forf. viser, at der gælder følgende Sætning: Naar Højderne i Trekant ABC skærer hverandre i Punktet A_1, saa skærer Højderne i Trekant A_1BC hverandre i A, og behandler derefter indgaaende denne Reciprocitet hos Trekanterne ABC og A_1BC. Olof Josephson skriver om: Lösningen af fjärdegradseqvationer. De Typer af Fjerdegradsligninger, som findes i elementære Lærebøger i Algebra, er hovedsagelig af to Slags: saadanne som kan løses gennem en simpel Substitution, og saadanne som kan løses gennem Kvadratrodsuddragning. Forf. Hensigt er at vise, at den sidstnævnte Metode dels faar større Rækkevidde og dels kan simplificeres, hvis man i Stedet for at anvende den sædvanlige Metode for Kvadratrodsuddragning af Polynomier undersøger Sammenhængen mellem et Andengradsudtryk og dets Kvadrat. I en lille Artikkel: En geometrisk Sats, løst med komplexa tal viser David Larsson, hvilke Fordele man undertiden kan have af at anvende Theorien om komplekse Tal paa Geometrien. Som Eksempel vælges følgende Sætning: Hvis $P_0, P_1 \cdots P_{n-1}$ betegner de n Vinkelspidser i en i Enhedscirklen indskreven, regulær n-Kant, saa er Produktet: $(P_0 P_1)\cdot(P_0 P_2)\cdots(P_0 P_{n-1}) = n$. Lektor A. Meyer viser, hvorledes man i Gymnasiet kan give et elementært og elegant Bevis for Minimum af Afvigelse ved et Prisme. I en længere Afhandling: Seismologiens mål och medel gør Tage Kora en Rede for forskellige Seismografer lige fra Kinesernes primitive Kvægsølvskaal med Indskæringer i Randen og til den store, moderne Uppsala Seismograf. Gustav S. Ljungdahl skriver om: Undersökning av missvisningen i et magnetiskt Störingsområde. Forf. der er ansat ved det nautisk-meteorologiske Institut, har i de senere Aar udført adskillige Misvisningsbestemmelser og meget detailleret undersøgt en Del svenske anormale Omraader, dels om Bord paa Institutets Motorbaad og dels paa mindre Fladefartøjer. I Tilslutning til en Artikel i 1. Aarg. 3. Hefte om Linseformlen angiver Gustav Forsstrøm en simpel Maade at udlede Formlen for Hulspejle paa. Den sidste Artikkel i Heftet er første Del af en klart og overskueligt skrevet Af-

Digitized by Google

handling af Gustav Almkvist om: Nyare teorier om den kemiska affinitetens natur.

Foruden de nævnte Artikler indeholder Heftet matematiske Opgaver og Løsninger til Opgaverne i forrige Hefte samt en fysisk Prisopgave for 1918—19, hvortil Adgangen staar aaben for »alla lärjunger vid allmänna läroverk, seminarier, tekniska skolor och med dessa jämnställda enskilda skolor.«

* * *

Ingeborg Cadovius, Anton Fisker, V. Herlev og L. P. Olsen: Regnebogen. Elevens Bog VII, Lærerens Bog VI. Gyldendalske Boghandel 1919. (Anmeldt af Adjunkt Paul Frederiksen, Ordrup).

De udmærkede Principper, der har været lagt til Grund for de tidligere udkomne Bøger af de samme Forfattere, er ogsaa anvendt her. Tredelingen i Gennemgangsopgaver, Enkeltmandsopgaver og Hjemmeregningsopgaver skal nok vise sig at være fortrinlig, særlig derved at Gennemgangsopgaverne giver Lærerne Lejlighed til at indøve Stoffet med saa stor Variation, at langt de fleste af Eleverne vil tilegne sig det. Da en Mængde af Opgaverne er hentet fra det praktiske Liv, vil de umiddelbart interessere Eleverne; dette gælder ikke mindst Opgaverne, der drejer sig om Aktier, Obligationer og Veksler; at Opgaver i Værdipapirer er taget med, vil gøre Bogen anvendelig i Aften- og Ungdomsskoler. Jeg anbefaler alle, der har med Regneundervisning at gøre, at sætte sig ind i disse Bøger, da der er mange nyttige Vink at faa.

Det havde været praktisk, om Elevens Bog og den dertil svarende Lærerens Bog havde samme Nummer.

Et Bevis for den ptolemæiske Sætning og dens omvendte Sætning.

Af N. F. Jensen.

I Firkant $ABCD$ sættes $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = m$ og $BD = n$.

I. Naar $\angle ABC + \angle ADC = 180^0$, er $nm = ac + bd$.

Bevis: Siden AD forlænges til E, saaledes at $\angle DCE = \angle BCA$; man har da $\triangle BCD \sim \triangle ACE$, deraf

Digitized by Google

$$\frac{b}{m} = \frac{n}{d + DE} \quad \text{eller} \quad nm = bd + b \cdot DE. \qquad (1)$$

Da

$$\triangle ABC \sim \triangle EDC$$

faar man

$$\frac{b}{c} = \frac{a}{DE} \quad \text{eller} \quad b \cdot DE = ac \qquad (2)$$

som indsat i (1) giver

$$nm = bd + ac.$$

II. Naar $n \cdot m = ac + bd$, er $\angle ABC + \angle ADC = 180^0$.

Bevis: $\triangle CDE$ konstrueres ligedannet med $\triangle CBA$, saaledes at E og A ligger paa modsat Side af CD.

Man har da

$$\frac{c}{b} = \frac{DE}{a} \quad \text{eller} \quad ac = b \cdot DE$$

af denne Ligning og den givne faar man

$$nm = b(d + DE). \qquad (3)$$

Af $\triangle CDE \sim \triangle CBA$ faar man desuden

$$\frac{c}{b} = \frac{CE}{m} \quad \text{eller} \quad \frac{c}{CE} = \frac{b}{m},$$

da tillige $\angle BCD = \angle ACE$, er $\triangle BCD \sim \triangle ACE$ og

$$\frac{b}{m} = \frac{n}{AE} \quad \text{eller} \quad nm = b \cdot AE. \qquad (4)$$

Af (3) og (4) faar man

$$AE = d + DE.$$

Punkterne A, D og E ligger altsaa i en ret Linie, eller $\angle ADC + EDC = 180^0$, da

$$\angle EDC = \angle ABC,$$

faar man altsaa

$$\angle ADC + \angle ABC = 180^0.$$

Stud...

Digitized by Google

Danske Eksamensopgaver.

Skovbrugs- og Landinspektøreksamen.

Februar—Marts 1919.

Regning.

I fire retvinklede, plane Trekanter er den ene Katete $a = 290{,}58$ m, medens den anden Katete $b = 7{,}6642$ m; 231,66 m; 509,68 m; 6256,0 m. Find i hver at Trekanterne a's modstaaende Vinkel A af $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$ og Hypotenusen c, af Hensyn til Kontrollen, baade af $c = \frac{a}{\sin A}$ og af $c = \frac{b}{\cos A}$.

Dernæst findes i en retvinklet Trekant med Kateterne $a = 716$ m, $b = 1712$ m Hypotenusen c med 4 Cifre af $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ved Anvendelse af Kvadrattalstavlen, og Vinkel A ved Kordetavlen som det halve af den Centrivinkel i Cirklen med Radius c, hvis Korde $= 2a$.

Resultater:

1)	$A = 88^0\,29',35$	$51^0\,26',2$	$29^0\,41',3$	$2^0 39',56$
	$c = 290{,}68$ m	$371{,}63(2)$ m	$586{,}69(8)$ m	$6263{,}0(2{,}9)$ m.
2)	$c = 1856$ m.	$A = 22^0, 41'(2)$.		

Algebra.

Hvad er den sande Værdi af Brøken

$$\frac{8x^4 + 20x^3 - 14x^2 - 5x + 3}{4x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 10x + 3} \text{ for } x = \infty?$$

Vis, at der er en endelig Værdi for x, der gør Brøken ubestemt af Formen $\frac{0}{0}$, og find den tilsvarende sande Værdi af Brøken. Bestem den sande Værdi af $\frac{\sqrt{x^2 + x + 7} + x - 1}{x^2 - 4x - 12}$ for $x = -2$ og af $\frac{(1 + \sin x)^n - 1}{x}$ (n positiv hel) for $x = 0$.

Resultater:

1) 2. 2) $\frac{28}{17}$. 3) $-\frac{1}{16}$. 4) n.

Trigonometri.

I en plan Firkant $ABCD$ er givet: $\angle A = 132^0\,34'$, $\angle B = 82^0\,18'$, $\angle C = 47^0\,26'$, $AB = 23{,}61$ m, $BC = 45{,}37$ m.

Digitized by Google

Vis, at Firkanten har en omskreven Cirkel, og find denne Cirkels Radius samt Firkantens Areal.

Resultater:

1) Radius = 24,35 m. 2) Firkantens Areal = 864,2 m^2.

Stereometri.

En Obelisk med Højden h har til Endeflader to kongruente Rektangler med Siderne a og b. En Side a i det ene Rektangel er parallel med en Side b i det andet, og Forbindelseslinien mellem Rektanglernes Centrer er vinkelret paa Rektanglernes Planer. Bestem Obeliskens Rumfang og Overflade. Hvilken Ligning maa a, b og h tilfredsstille, for at Obelisken skal have en indskreven Kugle?

Resultater:

1) Rumfang $= \frac{h}{6}\left[2ab + 4\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$.

2) Overflade $= 2ab + 4\cdot\frac{a+b}{2}\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + h^2}$.

3) Betingelsen for en indskreven Kugle

$$\frac{h}{6}\left[2ab + 4\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right] = \frac{h}{6}\left[2ab + 2(a+b)\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + h^2}\right]$$

der reduceres til $ab = h^2$.

Analytisk Geometri.

Der er givet to Cirkler med Ligningerne:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0 \text{ og } x^2 + y^2 + 4x + 9y - 15 = 0.$$

Find deres Radier, Koordinaterne til deres Centrer og deres Skæringspunkter, Ligningerne for deres Tangenter i et af disse Skæringspunkter samt disse Tangenters Vinkel. Idet et vilkaarligt Punkts Potenser med Hensyn til de givne Cirkler og dets Afstand fra Cirklernes Radikalakse betegnes ved C, D og a, skal vises, at $\frac{C-D}{a}$ er konstant.

Resultater:

$r_1 = 4$, $r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{157}$. Centrernes Koordinater $(1, -3)$ og $(-2, -\frac{9}{2})$. Skæringspunkternes Koordinater $(1,1)$ og $(\frac{21}{5}, -\frac{27}{5})$.

Tangenterne i $(1,1)$: $y = 1$ og $y - 1 = -\frac{6}{11}(x-1)$.

Digitized by Google

Tangenterne i

$\left(\frac{21}{5}, -\frac{27}{5}\right) : y + \frac{27}{5} = \frac{4}{3}\left(x - \frac{21}{5}\right)$ og $y + \frac{27}{5} = \frac{62}{9}\left(x - \frac{21}{5}\right)$.

For Vinklen mellem disse Tangenter er $\operatorname{tg} v = \frac{6}{11}$, $v = 28^0 37'$.

$$\frac{C-D}{a} = \frac{-6x - 3y + 9}{\frac{x + 2x - 3}{\sqrt{5}}} = -3\sqrt{5}.$$

Differential- og Integralregning.

Bestem Maximums- og Minimumsværdierne for Funktionen $y = 2\sin x + \sin 2x$ i Intervallet fra $x = 0$ til $x = 2\pi$.

Find $\int (2\sin x + \sin 2x)\, dx$, og dan Funktionen y's Række-udvikling efter Stirlings Formel op til Leddet med x^7 inkl.

Resultater:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \frac{5\pi}{3} \end{cases}$ $y = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{3} & \text{Max.} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} & \text{Min.} \end{cases}$

$\cos x = -1$, $x = \pi$, hverken Max. eller Min.

2) Integralet $= -2\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

3) $y = 4x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{17}{60}x^5 - \frac{13}{504}x^7 + \dots$

Pigeskolens Faglærerindeeksamen.

April 1919.

I.

1. Konstruer $\triangle ABC$ af a, r og R. Idet $R = \frac{5}{6}a$ angives, for hvilke Værdier af $\frac{r}{a}$ Opgaven er mulig.

2. Tegn Kurverne

$$y = x^3 - 2x^2 - 8x$$

og

$$y = 8x + 2x^2 - x^3$$

og find Arealet af den Figur, som begrænses af begge Kurverne.

3. Find et 4-cifret Tal, som er deleligt med 9, og hvor Differensen mellem første og fjerde Ciffer er lig Differensen mellem andet og tredje Ciffer, naar Tallet tillige skal være deleligt med et Primtal, hvis Tværsum er 14.

Digitized by Google

Resultater:

1. $\frac{R}{a} = \frac{5}{6}$ giver $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos A = \pm \frac{4}{5}$.

I $\triangle BOC$ kendes nu Siden $a = 2R \sin A$, Højden r og $\angle BOC = 90 + \frac{A}{2}$. Man faar umiddelbart $\sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} = \frac{r\cos\frac{A}{2}}{a}$.

$$\cos\frac{B+C}{2} = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \frac{r\cos\frac{A}{2}}{a} = \sin\frac{A}{2}$$

og

$$\cos\frac{B-C}{2} = \sin\frac{A}{2} + \frac{2r\cos\frac{A}{2}}{a},$$

altsaa $\frac{r}{a} \leq \frac{1 - \sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{A}{2}}$. For den spidse Vinkel faas $\frac{r}{a} \leq \frac{\sqrt{10} - 1}{6}$ og for den stumpe $\frac{r}{a} \leq \frac{\sqrt{10} - 3}{2}$.

2. De to Kurver er symmetriske m. H. t. Abscisseaksen og skærer denne i Punkterne $(-2,0)$, $(0,0)$, $(4,0)$. Vandrette Tangenter for $x = \frac{2}{3}(1 \pm \sqrt{7})$. Arealet bestemmes ved

$$\tfrac{1}{2}A = \int_{-2}^{0} (x^3 - 2x^2 - 8x)\,dx + \int_{0}^{4} (8x + 2x^2 - x^3)\,dx = 6\tfrac{2}{3} + 42\tfrac{2}{3}$$

$$A = 98\tfrac{2}{3}.$$

3. Tallet er 5841.

II.

Der ønskes en Fremstilling af Læren om Division af positive og negative Tal. Besvarelsen maa indeholde dels en Oversigt over Gangen i Undersøgelsen saaledes, at alle Definitioner og vigtigere Sætninger opstilles i deres indbyrdes Orden, dels en fuldstændig Gennemførelse af Beviset for Sætningen: I en Række paa hinanden følgende Multiplikationer og Divisioner er Ordenen ligegyldig.

III.

1. M er et vilkaarligt Punkt paa Parablen $y^2 = px$ med Brændpunkt F. K ligger paa Aksen, saa at $FK = \frac{1}{3}FM$. Find Stedet for Skæringspunktet mellem MK og Linien gennem F parallel med Normalen i M.

Digitized by Google

2. Find Vinkelen mellem Kanten og Diagonalen i en Terning. Terningen deles i 3 Legemer ved to plane Snit, som er vinkelrette paa en af Terningens Diagonaler, og som deler denne i 3 ligestore Dele. Beskriv de tre Legemer og beregn deres Rumfang, idet Kantens Længde er a.

Resultater.

1. Elimineres x_1 og y_1 mellem Ligningerne

$$y = -\frac{2y_1}{p}\left(x - \frac{p}{4}\right), \quad y - y_1 = \frac{y_1}{\frac{2}{3}x_1 - \frac{p}{3}}(x - x_1) \text{ og } y_1^2 = px_1,$$

faas

$$y\left(x - \frac{p}{2}\right)\left(y^2 + \left(x - \frac{p}{4}\right)^2\right) = 0.$$

De søgte geometriske Sted bliver den rette Linie, hvis Ligning er $x - \frac{p}{2} = 0$.

2. Vinklen bestemmer ved $\operatorname{tg} v = \sqrt{2}$. $v = 54^0{,}73$ Der dannes to tresidede Pyramider og en Prismatoide, Højden i dem alle er $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, Grundfladerne bliver ligesidede Trekanter med Siden $a\sqrt{2}$. Hver af Pyramiderne har Volumen $\frac{a^3}{6}$, Prismatoidens Volumen er $\frac{2a^3}{3}$.

IV.

En Landarbejder paa Sjælland tjente i 1915: 749 Kr. I Høsten fik han 3,25 Kr. i Dagløn, i Foraars- og Sommertiden 2,65 Kr. — og i denne Tid arbejdede han 3 Gange saa mange Dage som i Høst; i Vintertiden fik han kun 2,10 Kr., og det Antal Dage, han arbejdede for denne Dagløn, udgjorde 45 % af Arbejdsdagene i de to andre Tidsrum.

I. Hvor mange Dage arbejdede han i 1915?

I 1918 tjente den samme Mand med det samme Antal Arbejdsdage, fordelt som i 1915 — 1235 Kr., fordi Daglønnen var steget: for Vinterarbejde med $66\frac{2}{3}$ % og for Høstarbejde med en Sum, der var 40 Øre større pr. Dag end Stigningen for Foraars- og Sommerarbejde.

II. Hvad betaltes i 1918 i Dagløn til de forskellige Aarstider?

Digitized by Google

Studenterforeningen

I Jylland var Daglønnen i 1915 saaledes, at for 4 Dages Høstarbejde betaltes det samme som for $4\frac{1}{2}$ Dags Foraars- og Sommerarbejde eller for 6 Dages Vinterarbejde, og Aarslønnen blev derved 864 Kr. for en Mand, der arbejdede samme samlede Antal Dage som i I. og II., men fordelt paa Aarstiderne efter Tal, der staar i omvendt Forhold til Daglønnen.

III. Hvor stor Dagløn betaltes i Jylland i 1915?

I 1918 tjente en Arbejder i Jylland med 300 Arbejdsdage 1479 Kr. Dagløunen dér var det Aar for Høst, Foraar-Sommer og Vinter henholdsvis 6 Kr., 5,35 Kr. og 3,70 Kr., og den Tid han arbejdede i Høst udgjorde $\frac{3}{5}$ af Vinterarbejdstiden.

IV. Hvor mange Dage arbejdede han til hver Aarstid?

(Besvarelsen maa være saa udførlig, at Fremgangsmaaden træder klart frem, og Ligninger bør helst ikke anvendes ved Løsningen).

Resultater:

I. 290 Dage. II. 5,35 Kr., 4,35 Kr., 3,50 Kr. III. 3,60 Kr., 3,20 Kr., 2,40 Kr. IV. 60 Dg., 100 Dg., 100 Dg.

Almindelig Forberedelseseksamen.

Marts—April 1919.

Praktisk Regning.

1. Af 4320 kg Kaffe sælges $\frac{1}{4}$ med $16\frac{1}{2}$ pCt.'s Fortjeneste, $\frac{2}{5}$ med $23\frac{1}{4}$ pCt.'s Fortjeneste og Resten med $29\frac{1}{8}$ pCt.'s Fortjeneste.

Hvad har 1 kg kostet i Indkøb, naar Salgssummen i alt udgør 9346 Kr. 68 Øre?

2. A og B laaner d. 2. Januar 1910 en Sum Penge i en Bank til 6 $^0/_0$ p. a.

A skal forrente og tilbagebetale $\frac{2}{5}$ af Laanet, medens B skal forrente og tilbagebetale Resten.

A indbetaler i Banken 1340 Kr. d. 2. Januar 1912, 837 Kr. d. 2. Januar 1915 og afgør saa Resten af sin Forpligtelse ved at indbetale 3477 Kr. d. 2. Januar 1918.

Hvor stort var Laanet, og hvor meget maa B indbetale, naar han afgør hele sin Gæld d. 2. Januar 1919?

Der regnes med Rente af Rente.

Resultater:

1. 1,75 Kr.
2. 10000 Kr., 10140 Kr.

Digitized by Google

Aritmetik.

1. Reducer Størrelsen

$$\frac{x}{x + 2a} - \frac{a}{2x - a} - \frac{x^2 - ax - a^2}{x^2 + \frac{3}{2}ax - a^2}.$$

2. Rødderne i Ligningen

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

forholder sig som p til q. Bevis

$$\frac{B^2}{AC} = \frac{(p+q)^2}{pq}.$$

3. Find x af Ligningen

$$(\log x)^2 + \log \frac{1}{x^2} = (a + 1)(a - 1).$$

Eks. $a = 0{,}1234$.

Resultater

1. Størrelsen bliver lig Nul.

2. Af $\alpha + \beta = -\frac{B}{A}$, $\alpha\beta = \frac{C}{A}$ og $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$ faas ved at eliminere α og β $\frac{B^2}{AC} = \frac{(p+q)^2}{pq}$.

3. $\log x = 1 \pm a$, $x = 10^{1 \pm a}$.
Eksemplet giver $x = \begin{cases} 13{,}28(9) \\ 7{,}527. \end{cases}$

Geometri.

1. Konstruer et Trapez $ABCD$ ($BC \neq AD$), der kan indskrives i en Cirkel, naar AD og Afstanden mellem de parallele Sider har givne Længder, og $\frac{BC}{AD} = \frac{2}{3}$. Tegn dernæst den omskrevne Cirkel.

2. I et Rektangel $ABCD$ forlænges AD, og paa Forlængelsen afsættes $DE = \frac{1}{2}AD$. Linierne BD og CE skærer hinanden i F, og en Linie gennem F vinkelret paa AD skærer dennes Forlængelse i G. Bevis $GF = AB$.

3. I en Firkant $ABCD$ staar Diagonalerne vinkelret paa hinanden og skærer hinanden i O saaledes, at $OA = OC = 3$ cm, $OB = 1$ cm og $OD = 2$ cm. Find Radierne i Trekanterne ABC's og ADC's omskrevne Cirkler og Afstan-den mellem deres Centrer.

Digitized by Google

Resultater:

2. Da $DE \neq BC$ og $DE = \frac{1}{2} BC$, er $BD = DF$. Af $\triangle ABD \sim \triangle GFD$ følger, at $AB = GF$, hv. sk. b.

3. Kaldes Centrerne E_1 og E_2, faas af den retvinklede Trekant AOE_1, at $r_1 = 5$ cm, og af den retvinklede Trekant AOE_2, at $r_2 = 3{,}25$ cm. $E_1E_2 = 5{,}25$ cm.

Realeksamen.

Marts—April 1919.

Regning og Matematik.

1. A, B og C skal tilsammen udføre et Arbejde. Hvor mange Dage vil de være om det, naar A alene vilde kunne udføre det i 26 Dage, men B's Arbejdsevne er $1\frac{1}{2}$ Gang saa stor som A's, og C's Arbejdsevne er 25 % mindre end A's?

Hvor meget tjener enhver af dem, naar de lønnes i Forhold til deres Arbejdsydelser, og hele Arbejdet betales med 169 Kr.?

2. En Metalhandler støber en cylindrisk Blystang, der er $1\frac{3}{4}$ m lang og 7 cm i Tværmaal, om til Kugler, der passer til et Bøsseløb, hvis indre Omkreds er 27,5 mm. Hvor mange Kugler faar han, naar Blyet svinder $3\frac{1}{8}$ % ved Støbningen?

Idet d betegner Diametren (Tværmaalet) er Længden af en Cirkelperiferi $\frac{22}{7}d$, Arealet af en Cirkel $\frac{11}{14}d^2$. Rumfanget af en Kugle $\frac{11}{21}d^3$. En cylindrisk Stangs Rumfang er Tværsnittets Areal Gange Længden.

3. Find x og y, naar

$$x,\ 13,\ y$$

er en Differensrække, og

$$x,\ 12,\ y$$

er en Kvotientrække.

Resultater:

1. 8 Dage. — 52 Kr., 78 Kr., 39 Kr.
2. 18600 Kugler.
3. $x = 18$, $y = 8$ eller $x = 8$, $y = 18$.

Mellemskoleeksamen.

Marts—April 1919.

Regning.

1. En dansk Købmand købte af en engelsk Fabrikant 476 yards Lærred for $13\frac{1}{2}$ d. pr. yard; Fragten til Danmark udgjorde $\frac{5}{9}$ af Indkøbsprisen. Told og andre Omkostninger i alt 50,47 Kr. Hvor store blev hans samlede Udgifter?

Digitized by Google

Købmanden sælger Lærredet for 2,95 Kr. pr. m. Hvor meget tager han ind ved Salget, og hvor mange pCt. tjener han?

1 yard = 91 cm. 240 d. = 18,40 Kr.

2. D. 23. August køber en Mand af en Vekselerer 4000 Kr. 4 % Obligationer (Termin $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$) til Kurs 93 og 2000 Kr. $4\frac{1}{2}$ % Obligationer (Termin $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{7}$) til Kurs 98; Kurtagen er 1 p. m.

Hvor meget maa han betale Vekselleren?

Resultater:

1. 816,83 Kr., 1277,82 Kr., 56,44 %.
2. 5730,68 Kr.

Matematik.

1. Konstruer en Trekant ABC af Siden $AB = 6$ cm, Højden $CD = 3\frac{1}{2}$ cm og $AE = 3$ cm, idet E er Fodpnnktet af Højden BE.

2. Find x at Ligningen

$$\frac{8x - 11}{4} - \frac{37\frac{1}{2} - 11x}{3} = \frac{5\frac{2}{3}x + 12}{2}.$$

Resultater:

2. $x = 7\frac{1}{2}$.

Lærer- og Lærerindeeksamen 1919.

Regneopgave Nr. 1.

(3 Timer).

A solgte en Mark af Form som en Femkant $ABCDE$, hvori $AB = CD = 125$ m, $BC = AE = 600$ m, $DE = 450$ m, Diagonalen $AD \neq BC$ og $\angle E = 90^0$, for ialt 41472 Kr.

I. Hvad var Prisen pr. Td. Land, naar 1 Td. Land = 14000 Kvadratalen, og 1 m = 1,6 Alen?

For en Del af Salgssummen købte A $4\frac{1}{2}$ % Obligationer til Kurs $92\frac{1}{2}$ og Industriaktier til Kurs $277\frac{1}{2}$, medens Resten af Pengene sattes i en Sparekasse til en Rente af 4 % p. A.

Efter eet Aars Forløb hævede han Renterne saavel af Obligationerne som af Pengene i Sparekassen, og samtidig modtog han i Udbytte af Aktierne 6720 Kr., hvilket var $53\frac{1}{3}$ % af disses paalydende Værdi. Umiddelbart efter solgte han baade Aktier og Obligationer, og det viste sig nu, at hans Kapital ialt havde givet ham et Tab af 2687,42 Kr.

Digitized by Google

II. Hvor stor var Obligationernes paalydende Værdi, naar de Beløb, han anvendte til Indkøb af Obligationer og Aktier, forholdt sig til hinanden som 4 : 27?

III. Til hvilken Kurs blev Aktierne solgt, naar Obligationerne solgtes til Kurs $96\frac{1}{4}$?

(Besvarelsen skal nedskrives saa udførligt, at Tankegangen træder klart frem).

Resultater:

I. 1120 Kr. II. 5600 Kr. III. $198\frac{3}{4}$.

Regneopgave Nr. 2.

3 Timer.

Et Bryggeri købte 7800 hl 2radet Byg og 7400 hl 6radet Byg, Fragt og andre Omkostninger udgjorde 5 % af Kornets Pris, og 1 hl 2radet Byg kostede i Indkøb 2,40 Kr. mere end 1 hl 6radet Byg. Naar alt Kornet stod Bryggeriet i 304542 Kr.

I. Hvad kostede saa 1 hl af hver Slags Byg paa Indkøbsstedet?

Byggen blev tørret paa Bryggeriet, og den 2radede Byg svandt derved i Maal $1\frac{1}{3}$ Gang saa mange pCt. som den 6radede, men efter Tørringen var der dog $343\frac{3}{4}$ hl mere 2radet end 6radet Byg.

II. Hvor mange pCt. svandt hvert Parti?

Efter at der af det tørrede Korn var solgt $163\frac{3}{4}$ hl mere af den 2radede end af den 6radede Byg, var der ialt 13580 hl Korn tilbage, og Bryggeriet fik nu to Tilbud at vælge mellem, nemlig:

A) at lave Byggen til Malt og sælge denne for 50 Kr. pr. 100 kg eller

B) af al Malten at brygge Bayersk-Øl og sælge dette for 60 Kr. pr. hl.

Efter Tørringen vejede 1 hl 2radet Byg 70 kog, og 100 kg af denne Byg gav 75 kg Malt. 1 hl 6radet Byg vejede 60 kg, og 100 kg af den gav 72 kg Malt. Bryggeriet modtog Tilbud B og tjente derved 510460 Kr. mere, end hvis det havde modtaget Tilbud A, skønt Omkostningerne ved selve Øltilvirkningen (ɔ: Malt til Øl) var 875300 Kr.

III. Hvor mange hl Øl fik man i Gennemsnit af 1 hl tørret Byg?

(Besvarelsen skal nedskrives saa udførligt, at Tankegangen træder klart frem).

Digitized by Google

Resultater:

I. 20,25 Kr., 17,85 Kr. II. $1\frac{7}{8}$ %, $2\frac{1}{2}$ %. III. 2,1 hl.

Algebra.

(3 Timer).

1. En Kvotientrække bestaar af fem Led. Produktet af disse fem Led er 1024, og Summen af det første og det andet Led er 8. Find Rækken.

2. For hvilke Værdier af m vil Rødderne i Ligningen

$$x^2 + (4m + 66)x + 3m^2 + 62m + 7089 = 0$$

være reelle?

Resultater:

1. Rækken bliver 4, 4, 4, 4, 4 eller 16, — 8, 4, — 2, 1.
2. $(m - 50)(m + 120) \geq 0$, $m \geq 50$, $m \leq -120$.

Geometri.

(3 Timer).

1. I en ligebenet Trekant, hvis Grundlinie er a, og hvis Højde er h, er indskrevet et Rektangel, der staar paa den vandrette Grundlinie, medens de to øverste Vinkelspidser ligger paa hver sit af Benene. Hvor store er Rektanglets Sider, naar dets Højde skal være tre Gange saa stor som dets Grundlinie?

2. En given Cirkel skal ved to koncentriske Cirkler deles i tre Dele, hvis Arealer — regnede indenfra — skal forholde sig som Tallene 1, 2 og 3. Find Udtryk for de to Cirklers Radier, naar den givne Cirkels Radius er r, og konstruer de fundne Udtryk.

Resultater:

1. Siden: $\dfrac{ah}{3a + h}$, Højden: $\dfrac{3ah}{3a + h}$.

2. Radierne bliver $\dfrac{r\sqrt{6}}{6}$ og $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$. (Det forudsættes, at de to koncentriske Cirkler ligger helt indenfor den givne Cirkel).

Digitized by Google

Svenska examensuppgifter.

(Lösninger ved Lektor A. Rosen, Malmö).

Vårterminen 1919

Studentexamen.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. Vad är förhållandet mellan logaritmen för ett tal i det system, vars bas är $(a^a)^a$, och logaritmen för samma tal i det system, vars bas är $a^{(a^a)}$, då $a = 2,5$?

2. Från ett skepp, som seglar från söder mot norr, observeras 2 fyrar rakt i väster. Efter en timmes seglats synes den ena av dessa fyrar i sydväst, den andra i sydsydväst. Avståndet mellan fyrarner är 8 km. Beräkna skeppets hastighet.

3. Angiv tangenterna till parablarna $y^2 = -4ax$ och $x^2 = a\sqrt{2}\cdot y$ i deras skärningspunkter och bestäm vinkeln mellan de tangenter, som gå igenom samma skärningspunkt.

4. Lös ekvationen: $\sin 3x + \sin 2x = 3 \sin x$.

5. Bestäm höjden i den räta cirkulära cylinder med största möjliga volym, vars hela yta är lika med ytan av en sfär med radien r.

6. Vilken bör excentriciteten vara i en ellips, om den mindste spetsiga vinkel, som är möjlig för en i densamma inskriven parallellogram, är 30^0?

7. En rät cirkulär kon, vars basradie är $= 3$ cm och höjd $= 4$ cm, skäres av ett med basen parallelt plan, så att den avskurna stympade konens mantelyta är lika stor som snittytan. Toppkonen skäres av ett nytt plan på samma sät o. s. v. i oändlighet. Beräkna summan av alla snittytorna.

8. På en cirkellinje med radien 1 dm är avsatt en båge AB sådan, att om tangenten AT och BT dragas till bågen genom A og B, avståndet mellan deras skärningspunkt T och endara av punkterna A och B lika med längden av bågen AB. Beräkna genom grafisk konstruktion denna längd på en centimeter när.

9. Givna äro två räta linjer L och L_1 samt en utanför desamma belägen punkt O. Drag genom O en rät linje, som skär L och L_1 i två punkter A och A_1, så att rektangeln av OA och OA_1 får given storlek.

Digitized by Google

Resultater:

1. Förhållandet är $\sqrt{2,5}$. 2. Hastigheten är $(8+\sqrt{32})$ km i timmen. 3. Tangenterna äro $x=0$, $y=0$, vinkel 90^0 samt $x+y\sqrt{2}-2a=0$, $2x\sqrt{2}+y+2a\sqrt{2}=0$, vinkel $35^0\,16'$.

4. $x=\pm n\cdot 180^0$, $x=\pm 38^0\,40'\pm n\cdot 360^0$. 5. Højden är $\frac{2}{3}r\sqrt{6}$.

6. Excentriciteten är $\sqrt{4\sqrt{3}-6}$. 7. Summan är 15π cm^2.

8. Den sökta längden är 23 cm.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. En räntefri skuld på 1400 kr återbetalas i flera avbetalningar på det sätt, att vid första avbetalningen erläggas 50 kr och vid var och en av de följande 5 kr mer än vid närmast föregående. Efter hur många avbetalningar är skulden helt infriad?

2. Sök förhållandet mellan sidorna i en rektangel, då en och samma cirkel tangerar tre av dem och skär den fjärde i re lika delar.

3. Bestäm förhållandet mellan ytorna av en regulär tetraeder och en kub, vilka har ika store volymer.

4. Ett gods utarrenderades efter ägarens död på 15 år mot en årlig arrendesumma av 20000 kr. Härav skulle årligen hälvten användas för de 4 omyndiga arvingarnas uppfostran och andra hälften, som erlades vid årets slut, placeras mot 5 % ränta på ränta. Huru stort tillgodehavande hade efter arrendetidens slut vardera arvingen innestående?

5. Uppsök grafiskt med en decimal en rot till ekvationen $x^3-2x+5=0$.

6. I en triangel ABC är vinkeln $A=32^0\,35'$, höjden mot sidan $BC=3$ m och höjden mot sidan $AC=5$ m. Beräkn triangels yta.

7. För vilka hela positiva värden på x blir uttrycket

$$\frac{x^2-2x+3}{x-3}$$

ett helt, positivt eller negativt tal?

8.* En fyrsiding med sidorna a, b, c, d är inskriven i en cirkel. Bevis, att fyrsidingens yta A kan beräknas av formeln

$$A=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)s-d)},$$

där $2s=a+b+c+d$.

Digitized by Google

Studentersföreningen

Resultater:

1. Efter 16 avbetalningar. 2. Förhållandet är $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{2}$.
3. Förhållandet mellan tetraederns och kubens yter är $\sqrt[6]{3}$.
4. Varje arvinge har innestående 53946 m.
5. Ekvationens reella rot är $-2,1$. 6. Ytan är 9,592 m^2.
7. Det givna uttrycket kan skrivas $x + 1 + \frac{6}{x-3}$, varav ses att de sökta värdena på x äro 1, 2, 4, 5, 6, 9.

Realskoleexamen.

Provräkning.

1. En köpman avsände under maj och Juni 1918 inalles 140 brev, för vilka han betalade 15 kr. 8 öre i postporto. Hur många brev avsände han vardera månaden, då portot för varje brev i maj var 10 och i juni 12 öre?

2. På vilket belopp skall man utskriva en tre månaders växel, som genast diskonteras efter 6 %, för att få 800 kr för densamma, och vad hade man fått för växeln, om den lytt på 800 kr?

3. Lös ekvationen:

$$\frac{2x + 0{,}7}{x + 0{,}1} - \frac{3{,}4x - 7 + 3x^2}{3x^2 - 0{,}03} = \frac{x + 0{,}1}{x - 0{,}1}.$$

4. Vinklarna B och C i en triangel ABC förhållar sig till varandra som 5 till 6, och den omskrivna cirkelns tangent i C bildar med CB en vinkel på $7\frac{1}{7}^0$. Huru stora äro triangelns vinklar?

5. Vilket pris måste åsättas en vara, som i inköp kostat 350 kr, för att den skall kunna säljas med 10 % vinst, oaktat säljaren lämnar $16\frac{2}{3}$ % rabatt?

6. Vilket är fördelaktigast att köpa engelska tapeter för 4 kr 60 öre per rulle eller lika goda svenska för 3 kr rullen? En engelsk tapetrulle är 11 m lång och 55 cm bred, en svensk 8 m lång och 5 dm bred.

7. Två lika stora räta cylindrar med 8 cm basradie och 12 cm höjd ligga på ett horisontellt plan, så att de utefter hela sin längd tangera varandra. Beräkna volymen av rummet mellan de båda cylindrarna och planet. $\pi = 3{,}14$.

Resultater:

1. 86 brev i maj, 54 i juni. 2. 812 kr 18 öre; 788 kr.
3. $x = 2{,}704$. 4. Vinklarna äro $7\frac{1}{7}^0$, $78\frac{4}{7}^0$. $94\frac{2}{7}^0$.
5. 462 kr. 6. De engelske tapeternas pris är 76 öre för 1 m^2, de svenskas 75 öre för 1 m^2. 7. Det sökta rummet är 330 cm^3.

Digitized by Google

Bemærkninger til Opgave 375 i Nyt Tidsskrift for Matematik A

(29. Aargang Nr. 3 S. 79):

$$\text{»Skriv} \quad \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin 2\beta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin 2\gamma \end{vmatrix} \quad \text{paa logaritmisk Form«.}$$

For tre Vinkler a, b og c har man:

$$\sin a \sin(c - a) + \sin b \sin(b - c) = \tfrac{1}{2}(\cos(2a - c) - \cos c) + \tfrac{1}{2}(\cos c - \cos(2b - c)) = \tfrac{1}{2}(\cos(2a - c) - \cos(2b - c)) = -\sin(a + b - c)\sin(a - b).$$

Altsaa:

$$\sin a \sin(c - a) + \sin b \sin(b - c) + \sin(a + b - c)\sin(a - b) = 0. \quad (1)$$

Analogt hermed faas:

$$\sin b \sin(a - b) + \sin c \sin(c - a) + \sin(b + c - a)\sin(b - c) = 0 \quad (2)$$

og:

$$\sin c \sin(b - c) + \sin b \sin(a - b) + \sin(c + a - b)\sin(c - a) = 0. \quad (3)$$

Paa lignende Maade som ved (1) udledes:

$$\sin a \sin(b - c) + \sin b \sin(c - a) + \sin c \sin(a - b) = 0. \quad (4)$$

Ved Addition af (1), (2), (3) og (4) faas:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(a + b - c)\sin(a - b) + \sin(b + c - a)\sin(b - c) \\ + \sin(c + a - b)\sin(c - a) = -(\sin(a - b) + \sin(b - c) \\ \qquad + \sin(c - a))(\sin a + \sin b + \sin c). \end{array}\right\} \quad (5)$$

Sættes i (5) $a = \alpha + \beta$, $b = \beta + \gamma$ og $c = \gamma + \alpha$, faas:

$$\left.\begin{array}{l} \sin 2\alpha \sin(\beta - \gamma) + \sin 2\beta \sin(\gamma - \alpha) + \sin 2\gamma \sin(\alpha - \beta) \\ = -(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha))(\sin(\alpha + \beta) \\ \qquad + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha)), \end{array}\right\} \quad (6)$$

hvor venstre Side er lig med den i Opg. forelagte Determinant.

Da man har:

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{b+c}{2} \sin\frac{c+a}{2} + \sin(a + b + c), \quad (7)$$

kan den første Faktor i (6) gøres logaritmisk, og skal Determinanten kunne skrives paa logaritmisk Form, maa derfor ogsaa den anden Faktor kunne gøres logaritmisk. Af (7) faas:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)\\ &=4\sin\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{2\beta+\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{2\gamma+\alpha+\beta}{2}+\sin 2(\alpha+\beta+\gamma)\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

og ved heri at sætte $\pi-(\beta+\gamma)$ i Stedet for $\beta+\gamma$:

$$\left.\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)\\ &=4\sin\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}-\sin 2\alpha.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Af (8) og (9) følger da, at Størrelsen paa venstre Side heri — og dermed den forelagte Determinant — kan gøres logaritmisk, naar: $\alpha+\beta+\gamma=p\cdot\frac{\pi}{2}$; $2\alpha+\beta+\gamma=2p\pi$; $\alpha-\beta=(2p+1)\pi$ og $\alpha=p\cdot\frac{\pi}{2}$ (og analoge).

Af (5) kan der nu paa forskellige Maader dannes Determinanter af Formen:

$$\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \sin x\\ \sin\beta & \cos\beta & \sin y\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin z\end{vmatrix},$$

der i Almindelighed kan bringes paa logaritmisk Form.

1. For $a+b-c=\alpha-\beta$, $b+c-a=\beta-\gamma$, $c+a-b=\gamma-\alpha$ faas: $a=\frac{\gamma-\beta}{2}$, $b=\frac{\alpha-\gamma}{2}$, $c=\frac{\beta-\alpha}{2}$ og:

$$\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\frac{2\alpha-\beta-\gamma}{2}\\ \sin\beta & \cos\beta & \sin\frac{2\beta-\gamma-\alpha}{2}\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{2}\end{vmatrix}$$

$$=16\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\sin\frac{\beta-\gamma}{4}\sin\frac{\gamma-\alpha}{4}\sin\frac{2\alpha-\beta-\gamma}{4}\sin\frac{2\beta-\gamma-\alpha}{4}\sin\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{4}.$$

2. Sættes: $a-b=\alpha-\beta$, $b-c=\beta-\gamma$, $c-a=\gamma-\alpha$ faas: For: $a+b+c=0$: $a=\frac{\beta+\gamma-2\alpha}{3}$, $b=\frac{\gamma+\alpha-2\beta}{3}$, $c=\frac{\alpha+\beta-2\gamma}{3}$ og:

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\frac{4\alpha-2\beta-2\gamma}{3} \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin\frac{4\beta-2\gamma-2\alpha}{3} \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin\frac{4\gamma-2\alpha-2\beta}{3} \end{vmatrix}$$

$$= -16\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{2\alpha-\beta-\gamma}{6}\sin\frac{2\beta-\gamma-\alpha}{6}\sin\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{6}.$$

For: $a+b=0: a=\frac{\alpha-\beta}{2},\ b=\frac{\beta-\alpha}{2},\ c=\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{2}$ og:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\frac{-3\alpha+\beta+2\gamma}{2} \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin\frac{\alpha-3\beta+2\gamma}{2} \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin\frac{\alpha+\beta-2\gamma}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{2}.$$

For $a=0: b=\beta-\alpha,\quad c=\gamma-\alpha$ og:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(2\alpha-\beta-\gamma) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta-\gamma) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma-\beta) \end{vmatrix}$$

$$= 4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin(\beta-\gamma)\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{2\alpha-\beta-\gamma}{2}.$$

Endelig bemærkes, at der af (1), (2), (3) og (4) kan udledes Determinanter, der er identisk lig Nul; f. Eks.

Af (4) faas for: $a=\alpha-\beta,\ b=\beta-\gamma,\ c=\gamma-\alpha$:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(2\alpha-\beta-\gamma) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(2\beta-\gamma-\alpha) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(2\gamma-\alpha-\beta) \end{vmatrix} = 0.$$

og af (4) for $a=\alpha-\beta,\ b=\beta-\gamma,\ c-a=\gamma-\alpha$:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(2\beta-\gamma-\alpha) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta-\gamma) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin 2(\beta-\gamma) \end{vmatrix} = 0.$$

H. Paulli.

Digitized by Google

Opgaver til Løsning.

11. Bevis, at en Trekant er ligesidet, naar dens Vinkler tilfredsstiller Relationen:

$$\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C + (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)^2 = 3(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C).$$

12. Udled følgende Relation mellem en Trekants Vinkler:

$$\cos 2A \sin^2(B - C) + \cos 2B \sin^2(C - A) + \cos 2C \sin^2(A - B) = 4\left(\sin^2 A \sin\left(\frac{\pi}{3} + A\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - A\right) + \sin^2 B \sin\left(\frac{\pi}{3} + B\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - B\right) + \sin^2 C \sin\left(\frac{\pi}{3} + C\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - C\right)\right).$$

(11 og 12 af H. Paulli.)

13. Bevis, at i en spidsvinklet Trekant er Summen af Afstandene fra Vinkelspidserne til Højdernes Skæringspunkt lig med Summen af den omskrevne og indskrevne Cirkels Diametre. (N. F. Jensen.)

14. Find x af Ligningen

$$x + \frac{1}{1 - x} - \frac{1 - x}{x} - a - \frac{1}{1 - a} + \frac{1 - a}{a} = 0.$$

15. I en spidsvinklet Trekant ABC fældes Højden CD. Bevis, at

$$a^2 = b^2 + c(BD - AD).$$

Gælder Sætningen ogsaa, naar $\angle A > 90^0$?

16. Find et Tal, hvis Kubikrod skrives med Tallets sidste to-cifrede Del. (15 og 16 af N. Ø. Lund.)

17. Man har givet et Rektangel med Siderne $2a$ og $2b$, hvor $a > b$. Find det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra de to mindste Sider ses under Vinkler, der enten er lige store eller Supplementvinkler.

18. For hvilke hele positive Værdier af a, b og c har man

$$8(a^2 + b^2 + c^2) - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a) - 16(ab + bc + ca)?$$

(A. M. Bunk).

Digitized by Google

Opgaver til Undervisningsbrug.

11. Find Ligningerne for Tangenterne fra Punktet (2,3) til Parablen $y^2 = 4x$. Beregn derefter det Areal, som ligger mellem Parablen og de to Tangenter.

12. Bestem a, b, c og d saaledes, at den Kurve, der fremstilles ved Ligningen $y = a + bx + cx^2 + dx^3$, skærer Abcisseaksen i Begyndelsespunktet under en Vinkel paa 45^0 og gaar gennem de to Punkter paa Abcisseaksen, hvis Abcisser er 1 og 2.

Udfør en nøjagtig Tegning af Kurven, idet Længdeenheden er 3 cm, og beregn derefter, hvor mange Kvadratcentimeter det Areal er, som begrænses af Kurven og Tangenten til Kurven i Punktet (2,0).

13. En ret cirkulær Kegles Toppunktsvinkel er 60^0. Find Forholdet mellem Rumfangene af den indskrevne Kugle og den Keglestub, som fremkommer, naar man skærer den øverste Del af Kuglen bort med en Tangentplan til Kuglen parallel med Keglens Grundflade, (11—13 af I. L. W. Iessen).

14. Sök toppvinkeln i en rät cirkulär kon, som genom ett med basen parallellt snitt låter dela sig i två delar, lika såväll till volym som till total begränsningsyta.

15. Från punkten $(2a, 0)$ är en tangent dragen till ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Hur stor är ellipsens excentricitet, om denne tangents avstånd från medelpunkten är medelproportional mellan ellipsens halvaxlar?

(14—15 fra Tidskrift för elementär Matematik, Fysik och Kemi).

16. Find x af Ligningen

$$\sqrt[4]{x + 27} + \sqrt[4]{55 - x} = 4.$$

17. Opløs Polynomiet

$$x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + yz^2 + y^2z + 2xyz$$

i Faktorer.

18. ABC er en retvinklet Trekant. $CBPM$ og $CAQN$ er Kvadraterne paa Kateterne CB og CA. PA skærer CB i D, QB skærer CA i E. Bevis, at DE er parallel med PQ.

(16—18 efter School Science and Mathematics).

Digitized by Google

19. I en Trekant ABC er $\angle A = 33^0{,}45$ og $\frac{a}{b} = \text{tg}\, 33^0{,}45$. Find de andre Vinkler uden Brug af Logaritmetabel.

20. Lös ekvationssystemet:

$$3x - 5(2y - 9) = 15 - y$$
$$(4x - 2y) : 5 - 3 = 1{,}5y - x.$$

21. En person köpte 8 bankaktier för 6000 kr den 1 april 1916. Samma dag följande år fick han 40 kr i utdelning på hvarje aktie och lyckades samtidigt sälja dem till 760 kr stycket. Huru många procents ränta hade han härigenom på sina pengar?

22. På axeln till en rät kon, vars höjd är 75 cm och basdiameter 54 cm, tages en punkt så, att dess avstånd till konens topp och till en punkt på basens omkrets bliva lika stora. Hur långt från toppen är punkten belägen?

23. I en damm, vars yta är 1 har 0,8 ar, finnes havsvatten till 2 dm djup överallt. Huru många ton koksalt skulle kunna erhållas genom denna vattenmassas avdunstning, då 1 liter vatten innehåller 25 gr salt?

24. Under kriget, då tyska kursen var nere i 100 Mk = 44,32 kr, köpte en person för 2000 kr tyska riksbankssedlar i tanke att göra en stor vinst, då kursen efter kriget återkommit till det normala eller 100 Mk = 88,95 kr. Om detta inträffar först 3 år efter köpet, huru stor blir vinsten, om han räknar med 5 % ränta på sitt utlägg under tiden?

25. Vad bør priset vara på barrved, då en storfamn björkved kostar 80 kr, om man tar i betraktande, att björkved år 25 % tyngre än barrved; men barrved efter vikt räknat lämnar 5 % mera värme än björkveden?

26. En tornspira med formen av en regelbunden sexsidig pyramid skall på yttersidan beklädas med kopparplåt av 1 mm tjocklek. Spirans höjd är 18 m och baskanten (sidan i sexhörningen) 2 m. Hur stor yta skall beklädas och vad väger kopparbeklädnaden, då kopparns specifika vikt = 8,8?

(20—26 fra svensk Realskoleeksamen).

Digitized by Google

27. Find x, y og z af Ligningerne

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{2z} = \frac{z}{3x} \qquad x + y + z = a.$$

(O. A. Smith)

28. Find x og y af Ligningerne

$$x^2y + xy^2 = 3360, \qquad 1 : x + 1 : y = 6 : 35.$$

29. Konstruer en Firkant $ABCD$ af $AD = 9{,}5$ cm, $AB = 7$ cm, $BC = 3{,}5$ cm, $\angle ADB = 45^0$ og $\angle C = 90^0$ Bestem derefter dels ved Beregning dels ved Udmaaling, hvor lang AB skal være, for at Opgaven kun kan faa een Løsning.

(28—29 af I. L. W. Iessen.)

30. Två ångbåter avgingo samtidigt från en ort A och följde härefter med var sin oförandrade hastighet samma farled. Då den snabbere båten passerede ett ställe B, var den långsammere ännu 3 km därifran, och då den långsammere passerade B, hade den snabbare redan hunnit 4 km förbi B. Huru stort är avståndet mellan A og B?

(Tidsskrift för M. F. och K.)

31. Reducer Udtrykket

$$\left[(a^2 + 3an + n^2)^2 - a(a+n)(a+2n)(a+3n)\right] : n^4.$$

32. Tallene i den naturlige Talrække skrives i Rækkefølge efter hinanden

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ....

Hvad hedder det 10000de Ciffer i denne Række?

(31—32 efter I. Tannery: Leçons d'Arithmétique).

Rettelser til 1. Hefte.

S. 31, L. 15 f. n.: $R\left(2\sin(A+B)\cos(A-B) - 2\sin(A+B)\cos(A+B)\right).$

S. 33, L. 4 f. n.: Produktet bliver $(aq^p)^{2p+1}$.

S. 38, L. 12 f. n.: (Eks. $\angle C = 90^0$) udgaar.

Digitized by Google

Afkortet Multiplikation og Division.

Til Skolebrug.

(Af J. F. Johansen).

Det kan ofte kræve et betydeligt Arbejde, hvis man skal opnaa *fuld* Sikkerhed for Rigtigheden af 3—4 Decimaler. Man kan i mange Tilfælde ikke ud fra de givne Forudsætninger faa saa mange sikre Decimaler, ja man kan ingenlunde altid finde alle Cifrene i det søgte Tals hele Del.

I praktisk Regning vil det som Regel være tilstrækkeligt, at man kan betegne de Cifre, man medtager, som *sandsynligvis* rigtige.

Multiplikation.

Produktet 38,4972 · 0,239413 skal beregnes, idet der forudsættes, at begge Tallene er nøjagtige Værdier.

Da man som Regel ikke vil benytte Produktets 10 Decimaler, er det urimeligt at beregne dem alle, hvis det kan undgaas; men udelader man nogle, maa man kunne bestemme Kommaets Plads paa anden Maade end den sædvanlige. Det kan ogsaa let lade sig gøre, naar man før Multiplikationen flytter Kommaerne i de to Faktorer saaledes, at Produktet bliver uforandret, og at Multiplikator, her den bageste, faar eet betydende Ciffer foran Kommaet.

I

3,84972 ·	2,39413
7,6994	4
1,1549	16
3464	748
153	9888
3	84972
1	154916
9,2167	301436

II

3,84972 · 2,39413
7,6994
1,1549
3464
$15\bar{4}$
$\bar{4}$
$\bar{1}$
9,2166

Hvis man kun skal benytte 2 af Produktets Decimaler, vil i hvert Fald det, som staar paa højre Side af den lodrette Streg i I, være uden Indflydelse, naar man medtager *Menten* fra de Tal, der hører hjemme i Pillen nærmest til højre for Stregen.

Digitized by Google

I II er det overflødige udeladt. For hvert benyttet Ciffer i Multiplikator udelader man i Rækkefølge fra højre til venstre eet af Multiplikandens Cifre. Man bør efterhaanden sætte Mærker ved de Cifre i Multiplikator, som man multiplicerer med, og ved de Cifre i Multiplikanden, som man begynder med. Ved Bestemmelsen af den Mente, der skal medtages i den bageste Pilles Cifre, tager man kun Hensyn til det af Multiplikandens Cifre, der staar lige bag det, man begynder med. Den sædvanlige Forhøjelsesregel anvendes ved denne Mentes Bestemmelse.

En nærmere Undersøgelse vil vise, at kun i rene Undtagelsestilfælde vil den anden Decimal, bestemt paa denne Maade, ikke være absolut sikker. — Naar man afrunder det fundne Produkt til 9,22, kan man regne, at begge Decimaler er fuldt sikre.

Den bageste Pille i II indeholder og vil som Regel indeholde baade Over- og Underværdier. (Overværdierne er betegnet med en Streg over Cifret). Den *sandsynlige* Nøjagtighed vil derfor være større end den *eksakte*. Her er den tredje Decimal rigtig: $9{,}21\overline{7}$.

Naar der ikke udtrykkelig forlanges fuld Sikkerhed for Rigtigheden af alle Resultatets Decimaler, kan man følge Regelen: Man medtager under Regningen een Decimal flere, end Resultatet skal indeholde. — Den bageste Pille i II kan udelades, naar der kun kræves 2 Decimaler, der sandsynligvis er rigtige. Regnearbejdet bliver da meget stærkt reduceret.

Hvis de Tal, der skal multipliceres, er Tilnærmelsesværdier, kan man ved en rigtig afkortet Regning skønne om den Nøjagtighed, der kan naas.

Eks. Find Produktet af de afrundede Tal 384,26 og 0,325.

I	II
38.426·3,25	32,5·3,8426
115,278	97.5
7.685	26,0
1,921	$1{,}\overline{3}$
×··	$\overline{1}$
×·	124,9
×	
124,884	

I I viser Prikkerne, at der mangler, og Korsene, at der muligvis mangler Cifre, fordi de Cifre, man skulde have benyttet, er ukendte.

I II er der udført færre Regninger end i I. — I Modsætning til, hvad der ellers gælder, bør man i Regninger som denne, lade det Tal, der har flest betydende Cifre, være Multiplikator.

Resultatet maa afrundes til 125. Det sidste Ciffer er kun sandsynligvis rigtigt.

Eks. Et Værelses Længde, Bredde og Højde er udmaalt til henholdsvis 8,36 m, 3,27 m og 2,48 m, saaledes at begge Decimaler er fuldt sikre. — a) Find den sandsynlige Værdi for Gulvflade og Rumindhold. — b) Beregn til Sammenligning de sikre Grænser, mellem hvilke Gulvflade og Rumindhold ligger.

Division.

Ved Division kan man foretage en lignende Afkortning af Regningen som ved Multiplikation. For at kunne bestemme Kommaets Plads i Kvotienten omflytter man Kommaerne i Dividend og Divisor saaledes, at den sidste faar eet betydende Ciffer foran Kommaet.

Eks. Find Diameteren i den Cirkel, der har Omkredsen 22,5 cm; naar $\pi = 3,1416$. — Det første Tal er en nøjagtig Værdi, det sidste er jo en Tilnærmelsesværdi.

I

22,5000	00 : 3,1416 =	
21,9912	··	7,1619
5088	0··	
3141	6··	
1946	40··	
1884	96··	
61	440··	
31	416··	
30	0240··	
28	2744··	
1	7496	

II

22,5000 : 3,1416 =	
21,9912	7,1619
5088	
3142	
1946	
1885	
61	
31	
30	
28	
2	

Digitized by Google

Alt, hvad der i I staar til højre for den lodrette Streg, er uden Indflydelse paa Kvotienten, naar man medtager Menten fra Tallene i den Pille, der staar lige til højre for den lodrette Streg.

I II er den overflødige Del udeladt. I Stedet for som i I efter hver Enkeltdivision at føje et Nul til Resten udelader man her et af Divisors Cifre (fra højre)

Da Resten 2 i II er større end Halvdelen af Divisor, vil Kvotientens næste Ciffer blive 5 eller større end 5, hvorfor der forhøjes. Diameteren bliver 7,1620 cm.

Prikkerne i II (som man først ser fuldstændig bort fra) antyder, at der mangler Cifre, som ikke kan bestemmes ved den opgivne Værdi af π. Regningen viser altsaa ogsaa, at man med denne Værdi af π ikke kan finde Diameteren med flere end 4 Decimaler, og at Rigtigheden af den sidste Decimal endda er ret tvivlsom.

Eks. Beregn 3,807 : 0,7184, idet begge Tal er afrundede, men de opgivne Decimaler fuldt paalidelige.

```
38,07 : 7,184 = 5,30
35,92           . . .
-----
  215
  215
  ---
   00
   00
   --
    0
```

Af Divisor medtages kun saa mange Decimaler, at det første Produkt faar lige saa mange Cifre som Dividenden. — Man bør ikke sætte Kvotienten lig 5,3, men 5,30, da der er overvejende Sandsynlighed for, at den **anden** Decimal er rigtig.

— Beregn 180 : π, idet π = 3,1416.

— Ved en Vægtfyldebestemmelse fandtes Legemets Vægt lig 42,52 g, det samme Rumfang Vands Vægt lig 5,84 g Find Vægtfylden.

— Kviksølvs Vægtfylde er 13,596. Find Rumfanget af 847,245 g Kviksølv.

Digitized by Google

Disse Regninger er saa hensigtsmæssige og saa lette at lære, naar man som her udelader vidtløftige Beviser, at det forekommer mig, at de er paa deres Plads, ikke blot paa Seminarier, men ogsaa ved Undervisningen til alm. Forberedelseseksamen.

Danske Eksamensopgaver.

Adgangseksamen til polyteknisk Læreanstalt.

1919.

I.

1. En Pyramide med Grundflade G og Højde h skæres af to Planer, der begge er parallele med Grundfladen, og hvis indbyrdes Afstand er $\frac{1}{2}h$. Find Afstandene fra Toppunktet til de to Planer, naar Volumen af den Stub, der ligger mellem Planerne, skal være $\frac{1}{n}$ af hele Pyramidens Volumen. Mellem hvilke Grænser maa n ligge, for at Løsning kan være mulig?

2. Find Vinklerne i en ligebenet Trekant, naar dennes indskrevne Cirkel skal gaa gennem Skæringspunktet mellem Trekantens Højder.

3. Givet i en Plan to rette Linier og et Punkt P udenfor disse. Træk en Linie i en given Retning, der skærer de givne Linier i to Punkter X og Y saaledes, at

$$\overline{PX}^2 + \overline{PY}^2 = \alpha \overline{XY}^2,$$

hvor α er et givet Tal.

Opgaven løses særskilt i de to Tilfælde, hvor de givne Linier enten er parallele eller skærer hinanden.

Resultater:

1. Kaldes Afstanden fra Toppunktet til øverste Snitplan x, finder man

$$x = \frac{h}{4}\left(\sqrt{\frac{32-n}{3n}} - 1\right).$$

Skal Snitplanerne skære den givne Pyramide, maa

Digitized by Google

$$0 \leq x \leq \frac{h}{2},$$

hvad der giver

$$\frac{8}{7} \leq n \leq 8.$$

2. Kaldes den halve Topvinkel x og Grundlinien a, har man

$$2r = \frac{a}{2} \operatorname{tg} x,$$

som ved bekendte Formler giver

$$\sin x = \frac{2}{3}$$
$$x = 41^0\, 48'\, 39''.$$

3. Man konstruerer en Trekant $P_1 X_1 Y_1 \sim \triangle PXY$. Lad de givne Linier skære hinanden i O og en vilkaarlig Linie parallel med den givne Retning skære disse i X_1 og Y_1. Et geometrisk Sted for P_1 bliver da en Cirkel med Centrum i Midtpunktet af $X_1 Y_1$; hvor denne skærer Linien OP ligger P_1.

2, 1 eller 0 Løsninger. Konstruktionen overføres let til det Tilfælde, hvor de givne Linier er parallele.

II.

1. I en Firkant $ABCD$ kender man Siderne $AB = 197$ cm, $BC = 53$ cm, $\angle C = 75^0{,}48$, Diagonalen $AC = 240$ cm samt Firkantens Areal 8160 cm². Find Firkantens ikke givne Sider og Vinkler.

2. Beregn

$$x = 1{,}537^{\cos(\log \cos 40^0{,}7)}$$

Resultater:

1. $\angle B = 139^0{,}94$, $\angle A = 19^0{,}60$, $\angle D = 125^0$; $AD = 202$ cm, $DC = 58{,}08$ cm.

2. $x = 1{,}532$.

III.

1. Givet Tredjegradsligningen

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

med Rødderne α, β og γ. Dan en ny Tredjegradsligning med Rødderne $\alpha^2 + \alpha$, $\beta^2 + \beta$ og $\gamma^2 + \gamma$.

Digitized by Google

2. Find Antallet af fircifrede Tal, der skrives med lutter forskellige Cifre. Angiv dernæst, hvor mange af disse Tal, der ikke indeholder Cifret 0, og find Summen af disse sidste Tal.

Resultater:

1. Den søgte Ligning maa have Formen

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

hvor

$$-A = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha+\beta+\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) + (\alpha+\beta+\gamma); \quad A = 0.$$

$$B = \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$$

$$B = (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)(\alpha+\beta+\gamma+1) - \alpha\beta\gamma(3+2(\alpha+\beta+\gamma)); \quad B = -17$$

$$-C = \alpha\beta\gamma(\alpha\beta\gamma + (\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) + (\alpha+\beta+\gamma) + 1)$$

$$C = -55$$

Ligningen bliver følgelig

$$x^3 - 17x - 55 = 0.$$

2. Antallet af virkelig 4cifrede Tal er $P_{10,4} - P_{9,3} = 7\cdot8\cdot9^2$. De 4cifrede Tal, der ikke indeholder 0, bliver $P_{9,4} = 6\cdot7\cdot8\cdot9$, medens den søgte Sum bliver

$$P_{8,3}(1+2+3+\cdots+9)(1+10+10^2+10^3) = 5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9999.$$

IV.

1. Der er givet en Ellipse med Ligningen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Find det geometriske Sted for et Punkt, hvorfra man kan trække Tangenter til Ellipsen, hvis Heldningskoefficienter (Retningskoefficienter) μ_1 og μ_2 opfylder Betingelsen

$$\mu_1+\mu_2+\mu_1\mu_2+1=0.$$

Er Opgaven ogsaa mulig, hvis Ellipsen erstattes med Hyperblen

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1?$$

Digitized by Google

2. Find Maksimum og Minimum af Funktionen

$$y = x^3 - 12x,$$

hvor x er en reel variabel. Tegn dernæst Kurven

$$y = x^3 - 12x$$

og find det Areal, der ligger mellem Kurven, X-Aksen og Ordinaterne i Maksimums- og Minimumspunkterne.

3. Der er givet en Trekant med Vinkelspidserne $A:(0,0)$, $B:(1,2)$ og $C:(3,0)$. Find Centrum og Radius i den ydre Røringscirkel, der rører Siden AC og Forlængelserne af BA og BC.

Resultater:

1. Retningskoefficienterne μ for de Tangenter, der fra Punktet (x, y) kan trækkes til den givne Ellipse, bestemmes ved Ligningen

$$\mu^2(x^2 - a^2) - 2xy \cdot \mu + (y^2 - b^2) = 0.$$

Derved faas umiddelbart det søgte geometriske Sted

$$x + y = \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

For Hyperblen faas

$$x + y = \pm \sqrt{a^2 - b^2},$$

som bliver reelt, naar $a^2 \geq b^2$.

2. Funktionen har et Maksimum 16 for $x = -2$, et Minimum -16 for $x = 2$. Det søgte Areal bliver

$$\int_{-2}^{0} y dx - \int_{0}^{2} y dx = 40.$$

3. Centrum bliver

$$\left(\frac{3(\sqrt{5} - 1)}{2\sqrt{2} + \sqrt{5} - 3}, \frac{-6}{2\sqrt{2} + \sqrt{5} - 3}\right),$$

medens

$$r_b = \frac{6}{2\sqrt{2} + \sqrt{5} - 3}.$$

Studentereksamen.

Maj—Juli 1919.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Bevis, at Tangenten og Normalen til en Hyperbel i et vilkaarligt Punkt halverer Vinklerne mellem Brændstraalerne til Punktet.

Digitized by Google

2. Find x af Ligningen

$$a \cos^2 x + 1 = 2 \sin 2x,$$

og bestem Grænserne for a.

Eks. 1) $a = 0$, 2) $a = -6$.

3) Tangenten og Normalen til en Parabel i et vilkaarligt Punkt skærer henholdsvis Toppunktstangenten og Symmetriaksen i M og N. Find det geometriske Sted for Midtpunktet af MN.

Resultater:

2. Man faar $\operatorname{tg} x = 2 \pm \sqrt{3 - a}$, hvoraf $a \leq 3$.

1) $a = 0$ giver $\operatorname{tg} x = 2 \pm \sqrt{3}$, og $x = \begin{cases} 75^0 + p \cdot 180^0 \\ 15^0 + p \cdot 180^0 \end{cases}$

2) $a = -6$ giver $\operatorname{tg} x = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$ og $x = \begin{cases} 78^0, 69 + p \cdot 180^0 \\ -45^0 + p \cdot 180^0 \end{cases}$

3. Det geometriske Sted bliver Parablen

$y^2 = \frac{p}{8}\left(x - \frac{p}{4}\right)$, som har Toppunkt i $\left(\frac{p}{4}, 0\right)$ og Parameter $\frac{p}{8}$.

II A.

(For Dimittender, der har læst Infinitesimalregning.)

1. I en Trekant med Siderne a, b og c er

$$c = 3a \text{ og } r_a = s - b,$$

idet r_a betegner Radius i den af Trekantens udvendige Røringscirkler, der rører Siden a og de to andre Siders Forlængelser, og s betegner Trekantens halve Perimeter.

Find Trekantens Vinkler.

2. I en Pyramide, hvor Grundfladen er en ligesidet Trekant, og hvor hver Sidekant er dobbelt saa stor som Siden i Grundfladen, lægges gennem en Side i Grundfladen et plant Snit vinkelret paa den modstaaende Sidekant.

Find Forholdet mellem Rumfangene af de 2 Dele, hvori Pyramiden derved deles.

3. Bestem Udseendet af Kurven

$$y^2 = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

og find det af Kurven, Abscisseaksen og Linien $x = 1$ begrænsede Areal.

Resultater:

1. Formlen $r_a = (s - b) \cot \frac{C}{2}$ giver $C = 90^0$, hvorefter $\sin A = \frac{1}{3}$ giver $A = 19^0, 48$.

2. Det søgte Forhold bliver $\frac{1}{7}$.

Digitized by Google

3. Kurven, der er symmetrisk m. H. t. begge Koordinatakser, sender to Grene gennem Begyndelsespunktet og har i dette Punkt Tangenterne $y = \pm x$.

Asymptoterne bliver $y = \pm 1$.

Det søgte Areal $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \sqrt{2} - 1$.

II B.

(For Dimittender, der ikke har læst Infinitesimalregning.)

1. I en Trekant med Siderne a, b og c er

$$c = 3a \text{ og } r_a = s - b,$$

idet r_a betegner Radius i den af Trekantens udvendige Røringscirkler, der rører Siden a og de to andre Siders Forlængelser, og s betegner Trekantens halve Perimeter.

Find Trekantens Vinkler.

2. I en Pyramide, hvor Grundfladen er en ligesidet Trekant, og hvor hver Sidekant er dobbelt saa stor som Siden i Grundfladen, lægges gennem en Side i Grundfladen et plant Snit vinkelret paa den modstaaende Sidekant.

Find Forholdet mellem Rumfangene af de 2 Dele, hvori Pyramiden derved deles.

3. Hvilken Kurve bestemmes ved Ligningen

$$5x^2 + 5y^2 - 26xy + 42x + 6y + 45 = 0,$$

og hvorledes ligger den i Koordinatsystemet?

Resultater:

3. Den givne Kurve er en Hyperbel med Centrum i (1, 2) og Linierne $5x - y = 3$ og $5y - x = 9$ til Asymptoter.

Matematiske Opgaver.

Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af de to sproglige Linier.

1. Paa en Sparekassebog indsætter A $^1/_7$ 1910 500 Kr. og $^1/_7$ 1914 800 Kr.; $^1/_7$ 1917 hæver han 200 Kr. og $^1/_7$ 1918 300 Kr. Hvor stor en Sum har han staaende paa sin Bog $^1/_7$ 1919, naar Sparekassen forrenter Indskud med 4 % p. a.?

2. Hvor stort er Arealet af en regulær Tolvkant, der kan indskrives i en Cirkel med Radius 2 cm?

Digitized by Google

3. Beregn Sider og Vinkler i den Trekant, hvis Vinkelspidser i et retvinklet Koordinatsystem har Koordinaterne (2, 4), (— 4, 1) og (2, — 6).

Resultater:

2. 12 cm^2.

3. Siderne bliver $3\sqrt{5}$, 10 og $\sqrt{85}$.

Almindelig Forberedelseseksamen.

Juni 1919.

Regning.

1. En Koksbunke har Form som en Kegle, hvis Højde er 3,15 m, og hvis Grundflades Radius er 6,6 m.

Hvor mange hl Koks indeholder Bunken?

En Mand køber Koksene for 5,25 Kr. pr. hl, hvor meget giver han for dem?

En Kegle, hvis Højde er h, og hvis Grundflades Radius er r, har Rumfanget

$$\frac{22}{21} hr^2.$$

$$1\ m^3 = 10\ hl.$$

2. En Købmand i København køber i London 400 cwt. Sukker à 14 sh. 6 d.

Fragten er 16,25 pr. 1000 kg, og andre Omkostninger udgør 386,20 Kr.

Efter at han dernæst har betalt Tolden, viser det sig, at dette Parti Sukker er 203,20 Kr. dyrere end et lige saa stort Parti, som han har købt i København for 35 Kr. pr. 100 kg; hvor stor var Tolden pr. kg?

Købmanden sælger begge Partier for 45 Øre pr. kg; hvor mange pCt. tjener han paa det engelske, og hvor mange pCt. tjener han paa det danske Sukker?

1 cwt = 50,8 kg. 20 sh. = 240 d. = 18,20 Kr.

Resultater:

1. 1437,48 hl, 7546,77 Kr. — 2. 6,5 Kr. 25 %. 28,57 %.

Aritmetik.

1. Find Værdien af Størrelsen

$$\frac{p + 2q}{p - 2q} + \frac{q + 2p}{q - 2p}$$

naar p og q er Rødder i Ligningen

$$2x^2 + 5x - 8 = 0.$$

Digitized by Google

2. Afstanden mellem 2 Byer er $27\frac{1}{2}$ km. To Fodgængere A og B, af hvilke A gaar 1 km mere i Timen end B, forlader samtidigt hver sin By og mødes efter $2\frac{1}{2}$ Times Forløb.

Hvor mange km gaar hver af dem i Timen?

3. Reducer Størrelsen

$$\sqrt[3]{\frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{x^2 - 7x + 10}}$$

og beregn dens Værdi for $x = 4.873$.

Resultater:

1. Størrelsen reduceres til $\frac{6pq}{2(p+q)^2 - 9pq}$, som for de opgivne Linier bliver $-\frac{48}{97}$.
2. A gaar $11\frac{1}{2}$ km i Timen, B $10\frac{1}{2}$ km.
3. Størrelsen reduceres til $\sqrt[3]{\frac{(x-3)(x-4)}{x-5}}$.

Geometri.

1. I en Trekant ABC er $AB = 45$ cm, $AC = 51$ cm og Vinkel $B = 90°$. En Cirkel gennem B og C skærer AB i E og AC i F. Punkterne E og F forbindes.

Naar nu AE er 4 cm større end AF, hvor store er da Siderne i Firkant $BEFC$ og samme Firkants Areal?

2. I en Firkant $ABCD$, hvori Siden BC er parallel med Siden AD, halveres Vinklerne A og B af Diagonalerne.

Bevis, at Diagonalerne staar vinkelret paa hinanden, og at Trekanterne AOB og COD er kongruente, idet O er Diagonalernes Skæringspunkt.

3. Konstruer en Firkant $ABCD$ af Vinkel A, Vinkel C, Siden AD og Afstandene fra B og C til Siden AD.

Resultater:

1. Man finder $BC = 24$ cm, $AF = 30$ cm, $CF = 21$ cm, $BE = 11$ cm og $EF = 16$ cm. Det søgte Areal bliver 300 cm².
2. Man viser umiddelbart, at den opgivne Firkant maa være en Rhombe.
3. $\triangle ABD$ kan straks konstrueres, hvorefter C let bestemmes.

Digitized by Google

Pigeskoleeksamen.

Juni 1919.

Matematik.

1. Find x og y af Ligningerne

$$ax - by = a^2 - b^2 - 2ab,$$
$$bx + ay = a^2 - b^2 + 2ab.$$

2. En Korde $AB = 4{,}8$ cm i en Cirkel med Centrum O forlænges til C, saaledes at $BC = AB$. Find Cirklens Radius, naar Arealet af Trekant AOC er 336 mm².

3. Paa en ligesidet Trekant ABC's Sider BC, CA og AB ligger henholdsvis Punkterne A_1, B_1 og C_1 saaledes, at BA_1 er $\frac{1}{3}$ af Trekantsiden, A_1C_1 er vinkelrelret paa BC, og C_1B_1 er vinkelret paa AB. Bevis, at Trekanten $A_1B_1C_1$ er ligesidet, og find Forholdet mellem de to ligesidede Trekanters Arealer.

Resultater:

1. $x = a - b$, $y = a + b$.
2. $r = 7{,}4$ cm.
3. $\triangle BA_1C_1$, $\triangle AC_1B_1$, $\triangle CA_1B_1$ bliver kongruente. Det søgte Forhold bliver $\frac{1}{3}$.

Realeksamen.

Juni 1919.

Regning og Matematik.

1. A solgte et Parti Varer, der vejede 568 kg, for 3,60 Kr. pr. kg og havde herved en Fortjeneste af $12\frac{1}{2}$ pCt. Hvor meget tjente han ialt og hvor meget pr. kg?

A havde købt Partiet af B, der ved denne Handel tabte $11\frac{1}{9}$ pCt. Hvor meget havde B givet i alt og hvor meget pr. kg?

2. Den 8. Marts 1917 indsatte en Mand 2734 Kr. i en Sparekasse, der forrenter Indskud med 2 pCt. halvaarlig og tilskriver Renter hver 11. Juni og 11. December. Hvor meget havde han indestaaende i Sparekassen den 11. Juni 1917 umiddelbart efter Rentetilskrivningen.

Til hvilken Sum vil dette Beløb være vokset d. 11. December 1923, og hvor meget kan han hæve den 26. Marts 1924?

3. Dan den Ligning, hvis Rødder er $(p + 3q)$ og $(q + 3p)$, naar p og q er Rødder i Ligningen

$$x^2 - 6x - 4 = 0.$$

Digitized by Google

Resultater:

1. A tjente 40 Øre pr. kg og 227,20 Kr. ialt.
B havde givet 3,60 Kr. pr. kg og 2044,80 Kr. ialt.
2. 2762,25 Kr. — 3573,27 Kr. — 3614,96 Kr.
3. $x^2 - 24x + 92 = 0$.

Mellemskoleeksamen

Juni 1919.

Regning.

1. Et Vareparti paa 560 kg sælges for 840 Kr. med en Fortjeneste af 84 Kr. Et andet Vareparti paa 315 kg sælges for 504 Kr. med en Fortjeneste af 126 Kr. Find Indkøbspriserne pr. kg paa hvert af de to Varepartier.

Hvor mange pCt. er tjent paa hvert af Partierne, og hvor mange pCt. er tjent paa hele Forretningen?

2. Et Tog afg. fra Københ. Kl. 7^{38} og ank til Roskilde Kl. 8^{16}.

det	»	» Roskilde	»	8^{20}	»	»	» Ringsted	»	8^{54},
»	»	» Ringsted	»	8^{56}	»	»	» Sorø	»	9^{11},
»	»	» Sorø	»	9^{13}	»	»	» Slagelse	»	9^{28},
»	»	» Slagelse	»	9^{34}	»	»	» Korsør	»	9^{53}.

Naar Afstanden fra Københ. til Roskilde er 32 km,

»	»	»	»	Ringsted	»	64	»
»	»	»	»	Sorø	»	79	»
»	»	»	»	Slagelse	»	93	»
»	»	»	»	Korsør	»	111	»

beregn da, hvor mange km (2 Dec.) i Timen Toget kører paa hver af de 5 Strækninger.

Et Tog afgaar fra Korsør Kl. 11^{52} og kører 46,25 km i Timen; paa hvilket Klokkeslet er dette Tog i København, naar det ikke holder undervejs?

Kl. 7^{38} betyder 38 Minutter efter Kl. 7 o. s. v.

Resultater:

1. 1,20 Kr.; 1,35 Kr. — $33\frac{1}{3}$ %, $11\frac{1}{9}$ %, $18\frac{14}{27}$ %.
2. Da 1ste Spørgsmaal kan forstaas paa 3 forskellige Maader, bliver der 3 Rækker Besvarelser.

50,53 km — 56,47 km — 60 km — 56 km — 56,84 km
50,53 km — 50,53 km — 50,97 km — 50,72 km — 57,48 km
50,53 km — 53,33 km — 55,48 km — 54,71 km — 55,04 km.
Toget ankommer 2^{16}.

Digitized by Google

Matematik.

1. Konstruer en Firkant $ABCD$ af Siden $AB = 3$ cm, Diagonalen $AC = 5$ cm, $\angle B = 90^0$ og $\angle D = 60^0$, naar tillige Diagonalerne skal staa vinkelret paa hinanden.

2. I en retvinklet Trekant er den mindste Katete 7 cm mindre end den største og 8 cm mindre end Hypotenusen.

Find Trekantens Sider og Areal.

Løsning.

2. Siderne bliver 5 cm, 12 cm, 13 cm, Arealet 30 cm².

Optagelsesprøven til 1ste Seminarieklasse 1919.
(Jylland).

Regning.

(3 Timer).

1. Priserne paa en Rummeter (rm) Brænde i Skoven var: For Klov 14,30 Kr., for Fagot 12,60 Kr. og for Knippel 7,20 Kr. En Kommune modtog 468 rm Klov, 386 rm Fagot og 450 rm Knippel; men heraf kom 180 rm Klov og 90 rm Fagot med Bane fra en fjern Skov. For Kørsel til Bane betaltes 3,80 Kr., og for Kørsel fra Bane betaltes 2,10 Kr. pr. rm Klov eller Fagot. For Resten af Brændet var Transportudgifterne pr. rm: For Klov 4,25 Kr., for Fagot 4 Kr. og for Knippel 2,90 Kr. Den samlede Udgift til Brændet blev 20804 Kr. Banefragten var ens for Klov og Fagot. Hvor stor var den pr. rm?

2. 4880 Kr. stod paa Rente til $3\frac{3}{4}$ % p. a. og gav en Rente, der var 14,24 Kr. mindre end Renten i 174 Dage af 3880 Kr. til $4\frac{1}{2}$ % p. a. Hvor mange Dage stod de 4880 Kr. paa Rente? 1 Aar regnes til 360 Dage.

3. En liggende Cylinder af Sten vejer 1732,5 kg; dens Radius er 35 cm, og 1 dm³ af Stenen vejer 2,5 kg. Hvor mange Meter er Cylinderens Længde, og hvor mange Omdrejninger gør den, medens den ruller 1375 m? — ($\pi = \frac{22}{7}$).

Resultater:

1. 2,60 Kr. 2. 138 Dage. 3. 1,8 m; 625 Omdrejninger.

Digitized by Google

(Øerne).

Regning.

(3 Timer).

1. Paa en 9,36 Hektar (ha) stor Mark skal der udstrøs $1\frac{5}{6}$ kg Chilesalpeter og $1\frac{1}{3}$ kg Superfosfat pr. Ar (a). Chilesalpeter koster 54,75 Kr. og Superfosfat 24,25 Kr. pr. 100 kg. Udgiften til Fragt og Kørsel beløber sig til 1 Kr. $16\frac{2}{3}$ Øre pr. 100 kg. En Mand kan i 1 Time udstrø Chilesalpeter paa 39 a eller Superfosfat paa 36 a. Hele Udgiften til Markens Forsyning med de nævnte Kunstgødninger beløb sig til 1319,73 Kr. Hvilken Timeløn fik en Mand udbetalt for Udstrøningen? — 1 ha = 100 a.

2. A har i en Forretning indskudt en Sum, der er $13\frac{1}{3}$ % større end den Sum, B har indskudt. De tjener tilsammen 5068,80 Kr., der skal deles mellem dem i Forhold til deres Indskud. B køber for sin Fortjeneste et Parti Korn, som han snart efter sælger. Salgssummen indsætter han i en Bank, der giver $3\frac{1}{2}$ % p. a. i Rente. Efter 60 Dage hæver han Summen med Renter og faar herved udbetalt 2824,38 Kr. Hvor meget tjente han paa Kornet?

Et Aar regnes til 360 Dage.

3. Et cylindrisk Kar har en indvendig Radius paa 52,5 cm. I Karret hældes der først 485,1 l Vand, og derefter sænkes deri en Sten, saaledes at den er helt nede i Vandet. Efter at Stenen er nedsænket, staar Vandfladen 57,6 cm over Karrets Bund. Hvor højt stod Vandet i Karret, før Stenen nedsænkedes, og hvor mange Kubikdecimeter er Stenens Rumfang?

$\pi = \frac{22}{7}$; 1 l = 1 dm³.

Resultater.

1. 86 Øre. 2. 432 Kr. 3. 56 cm, 13,86 dm³.

Norske Eksamensopgaver.

(Løsningerne af Overlærer Søgaard, Kristiania.)

Realartium 1919.

Matematik.

I.

Forklar hvad man forstaar ved reduktion til kontant betaling, og vis hvilken formel man faar for den kontante værdi av en

Digitized by Google

kapital, som først forfalder om n aar. Anvend denne formel i følgende talopgave:

Paa en eiendom er gjort tre bud. Det ene er paa 83 000 kr. kontant; det andet er paa 100 000 kr. som først skal betales 4 aar fra salgsdagen; det tredje paa 94 200 kr. som skal betales efterhaanden, nemlig i 6 like store beløp med et aars mellemrum, det første paa salgsdagen.

Find den kontante værdi av hvert av de to sidste bud, naar rentefoten sættes lik 5 p. ct. p. a. Hvilket av de tre bud er under denne forutsætning bedst?

Hvor stor maa rentefoten være forat de to første bud skal være like gode?

Talregningen maa føres ind oversigtlig og fuldstændig.

II.

Siden i en regulær firkantet pyramides grundflate er git lik a; pyramidens høide er lik $2a$. Find sidekanten.

Pyramiden deles i to dele av et plan, som er lagt gjennem høidens midtpunkt lodret paa en sidekant. Find det stykke av denne sidekant som ligger mellem toppunktet og det skjærende plan. Find arealet av snitfiguren, og find tilslut volumet av hver av pyramidens to dele.

III.

Git parabelen $y^2 = 2px$ og punktet A (a, o). Kald parabelens brændpunkt F og et vilkaarlig punkt paa parabelen P. Træk brændpunktradien FP og parabeltangenten i P. Find det geometriske sted for skjæringspunktet mellem den rette linje gjennem A paralel med FP og den rette linje gjennem F lodret paa tangenten. Hvorledes forandrer dette geometriske sted sig naar punktet A gjennemløber X-aksen?

Tegn figur paa millimeternettet paa eksamenspapirets bakside. Vælg 1 cm til enhet og sæt $p = 2$.

Svar:

I. 82270 kr.; 83674 kr.; $p = 4{,}77$.

II. $s = \frac{3}{2} a\sqrt{2}$; $x = \frac{2}{3} a\sqrt{2}$.

fl. $= \frac{4}{21} a^2\sqrt{2}$; $v_1 = \frac{16}{189} a^3$; $v_2 = \frac{110}{189} a^3$.

III. $(x - a)^2 + y^2 = \left(a - \frac{p}{2}\right)^2$.

Digitized by Google

Dette geometriske sted er for alle værdier av a en cirkel. For $a = \frac{p}{2}$ degenererer den til brændpunktet. Naar $a \succ \infty$, vil cirkelens radius $\succ \infty$. Naar $a = \infty$, blir det geom. sted en cirkel med uendelig stor radius, hvis i det endelige liggende del utgør en del av den rette linje $x = \frac{p}{2}$.

Projektionstegning.

En terning med side lik 6 cm har sin ene sidekant liggende i det horisontale projektionsplan og støtter sig med sit bakerste hjørne mot det vertikale projektionsplan i en højde af 3 cm over horisontalplanet; den nævnte side danner en vinkel paa 30° med grundlinjen.

Gjennem midtpunktet av den diagonal som forbinder den nævnte sides forreste endepunkt med det motstaaende hjørne i terningen, skal lægges et plan lodret paa denne diagonal.

Tegn terningen med snit i horisontal og vertikal projektion, tilligemed det skjærende plans tracer.

Under optrækningen forutsættes skjæringsplanet ugjennemsigtig.

Sproglig-historisk artium 1919.

I.

Opløs trinomet $5x^2 - 4x - 9$ i enkelte faktorer.

Gjør ved hjælp herav rede for naar dette trinom har positiv værdi, naar det er nul, og naar det har negativ værdi.

Find tilslut trinomets mindste værdi og den tilsvarende værdi av x.

II.

Utled formelen for den værdi som en opgit kapital vokser til i løpet av n aar ved tillæg av rente og rentes rente efter en opgit rentefot.

Anvend formelen i følgende taleksempel:

Norges folkemængde har i dette aarhundrede gjennemsnitlig vokset med 0,8 pct. om aaret. Ved utgangen av 1916 var den 2 545 000. Hvor stor vil den være ved utgangen av 1926 under forutsætning av at tilvekstprocenten vedblir at være den samme? Og i hvilket aar vil den ha naadd 3 000 000?

Talregningen skal indføres.

Digitized by Google

III.

Konstruer en firkant $ABCD$ hvor $AD = 6$ cm, $\angle A = 67\frac{1}{2}^0$, DC er lodret paa diagonalen AC, hjørnet C har samme avstand fra AB som fra AD, og hjørnet B har samme avstand fra A som fra C.

Bevis at denne firkant er et trapez.

Beregn de ukjendte sider og vinkler.

Svar:

I. $T = 5 \cdot (x - \frac{9}{5})(x + 1)$.
T pos. naar $x > \frac{9}{5}$ eller $x < -1$.
$T = 0$ naar $x = \frac{9}{5}$ eller naar $x = -1$.
T neg. naar $-1 < x < \frac{9}{5}$.
T min. $= -9{,}8$ for $x = \frac{2}{5}$.

II. 2 756 100 mennesker.
Aar 1937 ($n = 20{,}646$ aar).

III. $AB = BC = 3$ cm, $CD = 3{,}3$ cm.
$\angle B = 112^0\ 30'$, $\angle C = 123^0\ 45'$, $\angle D = 56^0\ 15'$.

Middelskoleksamen 1919.

Fuldstændig prøve.

Formiddag.

I.

En grosserer har faaet hjem fra England en kasse som indeholder to partier drestøi. Det ene parti bestaar av 22 stykker til en Indkjøpspris av 7 £ 4 sh. pr. stykke, det andet parti bestaar av 33 stykker til 5 £ 8 sh. pr. stykke. Hvad blir kjøpesummen i £ og sh. for hvert parti?

Hans øvrige utgifter (til fragt, told o. s. v.) beløper sig til 250 kr. Disse utgifter fordeler han paa de 2 partier i forhold til disses vegt; hvert stykke av det første parti veier 6,5 kg og hvert stykke av det andet parti veier 5,5 kg.

Hvor meget kommer saaledes hvert parti paa i norske penger, og hvor meget blir det pr. meter av hvert parti, naar hvert stykke indeholder 12 yards?

1 £ = 20 sh., 1 £ = kr. 18.20. 11 yards = 10 meter.

II.

Konstruer en trekant, hvor siden $AB = 6$ cm, $\angle A = 75^0$, $\angle C = 45^0$.

Digitized by Google

Konstruer trekantens omskrevne cirkel.

Hvor mange grader utgør $\smile BC$, $\smile CA$, $\smile AB$?

Kald cirkelens centrum O og træk radierne OA og OB. Hvor stor blir $\angle AOB$? Beregn tilslut radiens længde.

Forklar fremgangsmaaten.

Svar.

I. 158 £ 8 sh.; 178 £ 4 sh.
2093,05 kr.; 3387,07 kr.
12,47 kr. pr. m; 9,40 kr. pr. m.

II. $\smile BC = 150^0$; $\smile AC = 120^0$; $\smile AB = 90^0$.
$\angle AOB = 90^0$; $r = 4{,}243$ m.

Eftermiddag.

I.

Man har to sorter messing; den første indeholder 75 pct. kobber, den anden indeholder $66\frac{2}{3}$ pct. kobber.

Hvor mange (x) kg av første sort og hvor mange (y) kg av anden sort maa man smelte sammen for at faa 20 kg som indeholder 70 pct. kobber?

II.

Hvor meget veier en kviksølvsøile som naar til en høide av 76 cm i et cylindrisk glasrør hvis indre diameter er 5,6 mm?

Kviksølvets specifike vegt er 13,6.

En kviksølvsøjle som i et andet cylindrisk glasrør naar til samme høide, veier 892 g. Hvor stor er den indre diameter i dette rør?

Svar.

I. $x = 8$ kg, $y = 12$ kg.

II. 254,448 gr, $d = 10{,}5$ mm.

Tillægsprøve.

Formiddag.

I.

Find x av ligningen

$$\frac{\frac{2}{3}(3x - 2{,}5) - 0{,}1\,(8x + 6)}{\frac{3}{8}(3x + 7) - \frac{3}{4}} = \frac{1}{6}.$$

Indsæt den fundne værdi for x i uttrykket paa venstre side av likhetstegnet, og prøv derved om svaret er rigtig.

Digitized by Google

II.

Som fuldstændig prøve II.

Svar.

I. $x = 9$.

Eftermiddag.

I.

Som fuldstændig prøve I.

II.

Konstruer en retvinklet trekant ABC, hvori kateten $AC = 4{,}5$ cm og høiden paa hypotenusen, $CD = 3{,}6$ cm.

Konstruer en ny trekant PQR som er likedannet med ABC og har hypotenusen $PQ = 10$ cm.

Beregn de 2 stykker AD og BD av hypotenusen, og derav hypotenusen selv.

Beregn høiden paa hypotenusen i trekanten PQR.

Svar:

II. $AD = 2{,}7$ cm, $BD = 4{,}8$ cm,
$AB = 7{,}5$ cm, $h = 4{,}8$ cm.

Smaa-Afhandlinger.

Pagodespillet.

Et Puslespil omdannet til matematisk Opgave.

Af Adjunkt Viggo Bredsdorff.

Man kan af og til blandt underholdende Opgaver og Puslespil finde følgende Opgave varieret paa forskellig Maade. Paa et Plan findes tre Stifter A, B og C; desuden har man f. Eks. 8 Papskiver med Hul i Midten og voksende i Omkreds Idet alle Plader ligger paa Stift A, den største underst, spørges der om, hvor faa Ombytninger der kræves for at faa dem alle over i samme Orden paa B eller C, idet man kun maa flytte een ad Gangen og aldrig en større Plade over paa en mindre.

Problemet lader sig let løse selv for n Plader, idet Antallet af Ombytninger i saa Fald er $S_n = 2^n - 1$.

Systemet er dette: Skiftevis paa B og C bygges Pladepyramider op fra 1, 2, 3, 4 o. s. v. mens skiftevis C og B staar fri.

Digitized by Google

Eks. paa A: 8, 7, 6; paa B: 5, 4, 3, 2 og 1. C fri
næste Gg. paa A: 8, 7. B fri C: 6, 5, 4, 3, 2, 1.

At ovenstaaende Formel er rigtig kan vises ved Induktion.

Lad os tænke os at Pladerne $n, n-1, n-2 \cdots 1$ ligger paa B, Pladerne $n+1$, $n+2$ o. s. v. paa A, mens C er fri. Til denne Stilling har man brugt $2^n - 1$ Ombytning.

Nu flyttes $(n+1)$-Pladen over paa C. A kan nu betragtes som fri, og Opgaven, der staar tilbage, er at flytte Pyramiden fra B til C; dertil kræves $2^n - 1$ Ombytninger, altsaa er

$$S_{n+1} = S_n + 1 + S_n = 2^{n+1} - 1.$$

Hvis man nu udvider Opgaven til 4 Stifter, viser det sig, at Problemet i Virkeligheden er nyt. Det kan i saa Tilfælde løses paa nedenanførte Maade.

I l'Enseignement Mathematique Mai 1917 findes Problemet behandlet af Pierre Bovet paa en noget afvigende Maade med andre Formler. Det, der morede mig ved Opgaven, var nu at udvide den til et vilkaarligt Antal Stifter (p) og et vilkaarligt Antal Plader $n > p$ og til dette Øjemed havde jeg Brug for en Fremgangsmaade noget forskellig fra Pierre Bovet's.

Lad os foreløbigt holde os til 4 Stifter og n Plader.

Men for ikke at komme med Gentagelser kan det her straks slaas fast, at naar Stifternes Antal er p og Pladernes n saa vil, saa længe $n < p$, Antallet af Omflytninger være

$$S_n = 1, 3, 5, 7 \cdots, 2n - 1 \; (= 2p - 3),$$
$$\text{for } n = 1, 2, 3, 4, \quad n \; (= p - 1)$$

Stifterne være A, B, C, D.

Man flytter nu saaledes, at D bærer Pladerne fra $n-3$ til 1. (Flytninger S_{n-3}); derpaa flyttes de 3 sidste Plader over paa f. Eks B, hvilket i Følge første Opgave kræver $2^3 - 1 = 7$ Flytninger; derpaa flyttes de $(n-3)$ Plader over paa B, dette kræver S_{n-3} Flytninger, altsaa

$$S_n = 2\, S_{n-3} + 7.$$

Denne Formel gælder for 4 Stifter for $n \geqq 4$.

$S_1 = 1$,
$S_2 = 3$,
$S_3 = 5$,
$S_4 = 2 \cdot 1 + 7$; $S_7 = 2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 7$; $S_{10} = 2^3 \cdot 1 + 7 \cdot 7$; $S_{13} = 2^4 \cdot 1 + 15 \cdot 7$,
$S_5 = 2 \cdot 3 + 7$; $S_8 = 2^2 \cdot 3 + 3 \cdot 7$; $S_{11} = 2^3 \cdot 3 + 7 \cdot 7$; $S_{14} = 2^4 \cdot 3 + 15 \cdot 7$,
$S_6 = 2 \cdot 5 + 7$; $S_9 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$; $S_{12} = 2^3 \cdot 5 + 7 \cdot 7$; $S_{15} = 2^4 \cdot 5 + 15 \cdot 7$.

Digitized by Google

Dette lader sig samle under følgende Formel. Antallet af Omflytninger er S_n bestemt ved

$$n = q \cdot 3 + \begin{cases} 1 \\ 2, \\ 3 \end{cases} \quad S_n = 2^q \cdot \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 5 \end{cases} + (2^q - 1) \cdot 7.$$

Udvider man nu Problemet til at omfatte p Stifter benytter man ganske analog Fremgangsmaade: paa p^{te} Stift anbringes $n-(p-1)$ Plader (Flytninger $S_{n-(p-1)}$), derpaa skal en Pyramide paa $(p-1)$ Plader flyttes over paa en anden Stift, naar man har $p-1$ Stifter, dette kræver $2p-1$ Ombytninger. Flyttes nemlig 2 Plader over paa $(p-1)^{te}$ Stift (3 Flytninger) er Opgaven reduceret til at flytte $p-3$ Plader med $p-2$ Stifter $S = 2(p-2) - 3 = 2p-7$, altsaa i alt

$$2p - 7 + 2 \cdot 3 = \underline{2p - 1}.$$

Antallet af Ombytninger bliver saa:

$$S_{n,p} = 2\, S_{n\, p-1)} + 2p - 1.$$

Idet man nu husker, at $S_{1, 2, 3 \ldots p-1} = 1, 3, 5 \cdots, 2(p-1) - 1$ kan ovenstaaende Formel paa ganske analog Maade som ved 4-Stifteproblemet samles til følgende Udtryk. Idet n for Division med $p-1$ giver Resten $1, 2, 3 \cdots p-1$ haves

$$n = q \cdot (p-1) + \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p-1 \end{cases}$$

$$S_{n,p} = 2^q \cdot S_{1, 2, 3 \ldots p-1} + (2^q - 1)(2p - 1).$$

Beviset for Formlen kan føres ad induktiv Vej, idet man benytter ganske samme Fremgangsmaade som ved 3-Stifteproblemet.

Karakteristikens Bestemmelse.

Af Adjunkt B. P. Berthelsen.

Den almindelige tvedelte Regel til Bestemmelse af Karakteristiken, een Form for Tal lig eller større end 1, en anden Form for Tal mindre end 1, større end Nul, har efter min Erfaring ofte voldt mindre begavede Elever Besvær.

Nu kan der selvfølgelig tvistes om, hvorvidt en Regneregel er heldig paa dette Sted eller ej. Men vil man have en saadan, bør den næppe være tvedelt.

Digitized by Google

Dette kan undgaas paa følgende Maade:

Ved Ciffereksponenten forstaas Tallet 3 til det Ciffer, der staar paa Tusindernes Plads, Tallet 0 til det Ciffer, der staar paa Enernes Plads o. s. v. Nedenfor ses saaledes et Tal med sine Ciffereksponenter foroven:

$$\overset{2,}{3}\;\overset{1,}{8}\;\overset{0,}{9},\overset{-1,}{7}\;\overset{-2,}{5}\;\overset{-3,}{6}\;\overset{-4,}{8}.$$

Man har da:

Karakteristiken er lig Ciffereksponenten til det første Ciffer, der er forskellig fra Nul

Eks.: $\log \overset{2}{3}\overset{1}{7}\overset{0}{8},\overset{-1}{5} = 2,\cdots$; $\log \overset{0}{0},\overset{-1}{0}\;\overset{-2}{0}\;\overset{-3}{8}97 = 0,\cdots - 3$.

Om Potenssummer.

Af Skoleinspektør P. Kock.

Formlerne for Potenssummerne

$$\Sigma n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

og

$$\Sigma n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{4}$$

kendes i Regelen allerede i Gymnasiet, idet de ofte benyttes som Opgaver til Indøvelse af det alm. Induktionsbevis.

Allerede Jacob Bernoulli (1654—1705), Professor i Basel, har fundet Formler for Potenssummerne fra Σn^2 til Σn^{10}, idet han paa en simpel Maade gjorde disse Summer afhængige af Opsummeringen af Rækkerne:

$$R_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$
$$R_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1)$$
$$R_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n + 1)(n + 2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_p = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (p + 1) + \cdots + n(n + 1)(n + 2) \cdots (n + p - 1)$$

Sættes saaledes i Identiteten

$$x^2 = x(x + 1 - x) \tag{1}$$

efterhaanden $x = 1, 2, 3 \cdots n$, og adderes de fremkomne Ligninger, faar man:

$$\Sigma n^2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) - (1 + 2 + 3 + \cdots + n). \tag{2}$$
$$= R_2 - R_1.$$

Digitized by Google

Identiteten

$$x^3 = x(x+1)(x+2) - 3 \cdot x(x+1) + x \tag{3}$$

giver paa samme Maade

$$\begin{aligned}\Sigma n^3 = & \ 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) \\ & - 3(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)) \\ & + \ (1 + 2 + 3 + \cdots + n). \\ = & \ R_3 - 3R_2 + R_1.\end{aligned} \tag{4}$$

Identiteterne (1) og (3) kan findes saaledes:

Man sætter (idet Tegnet $\equiv$ betyder »identisk lig med«):

$$x^2 \equiv a \cdot x(x+1) + b \cdot x,$$

der omskrives til

$$x^2 \equiv ax^2 + (a+b) \cdot x.$$

Heri maa a være $= 1$ og $a + b = 0$; altsaa $b = -1$.

Dernæst sætter man

$$x^3 \equiv a \cdot x(x+1)(x+2) + bx(x+1) + cx,$$

der omskrives til

$$x^3 \equiv a \cdot x^3 + (3a + b)x^2 + (2a + b + c) \cdot x.$$

Ved Sammenligning af Koefficienterne faas

$$a = 1, \quad b = -3, \quad c = 1.$$

Hvorledes Opsummeringen af Rækkerne $R_1, R_2, R_3 \cdots R_p$ foregaar, skal her kun vises for R_3's Vedkommende.

Man har, idet man deler 4 i $0 + 4$, 5 i $1 + 4, \cdots n + 3$ i $(n-1) + 4$,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 &= 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$(n-1)n(n+1)(n+2) = (n-2)(n-1)n(n+1) + 4(n-1)n(n+1)$$
$$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n-1)n(n+1)(n+2) + 4 \cdot n(n+1)(n+2),$$

hvoraf ved Addition:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = 4[1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)],$$

som giver

$$R_3 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Paa lignende Maade finder man

Digitized by Google

$$R_2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

og som bekendt er

$$R_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Anvendes disse Udtryk for R_1, R_2 og R_3 i (2) og (4), faar man

$$\Sigma n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6},$$

$$\Sigma n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Dette sidste Udtryk for Σn^3 giver os Formlen

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3,$$

der ogsaa hører til dem, man paa et tidligt Stadium faar Lov til at bevise ved Induktion.

Løste Opgaver.

1. Idet α, β og γ er Vinkler i en Trekant, skal man vise, at Ligningen

$$\sin^3 v = \sin(\alpha - v)\sin(\beta - v)\sin(\gamma - v)$$

tilfredsstilles af

$$\cot v = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} + \cot\alpha.$$

A. M. Bunk.

Løsning:

Anvendes Formlen for $\sin(x - y)$ og multipliceres ud paa Ligningens højre Side, faas ved Benyttelse af Formlerne for $\cos(x + y + z)$ og $\sin(x + y + z)$ og af, at $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$,

$$\cot v = \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

De to Udtryk for $\cot v$ ses nu let at være identiske, ifølge Forudsætningen.

Bisgaard Kristensen.

Digitized by Google

2. Til et Keglesnit drages 2 Tangenter med Røringspunkter A og B. Ordinaterne i A og B skærer Tangenterne udenfor Keglesnittet i C og D. Bevis, at CD og AB skærer hinanden paa X-Aksen.

A. M. Bunk.

Løsning:

Lad Keglesnittet være

$$y^2 = px + qx^2$$

og Tangenternes Røringspunkter $A(x_2, y_2)$ og $B(x_1, y_1)$. Da Ligningen for Tangenten i B er $2yy_1 = p(x + x_1) + 2qxx_1$, bliver Ordinaten til Punktet D

$$y_D = \frac{p(x_1 + x_2) + 2qx_1x_2}{2y_2}$$

og til Punktet C

$$y_C = \frac{p(x_1 + x_2) + 2qx_1x_2}{2y_1}$$

altsaa

$$\frac{y_C}{y_D} = \frac{y_2}{y_1},$$

hvoraf Sætningen følger, idet Linien AB skærer X-Axen i Punktet

$$\left(\frac{x_1y_2 - y_1x_2}{y_2 - y_1}, 0\right).$$

pq.

3. I $\triangle ABC$ tegnes de udvendige Røringscirkler i $\angle A$ og $\angle C$ med Røringspunkterne M og N paa a (M mellem B og C). Find Vinklerne i $\triangle ABC$, naar $\triangle AMN$ er ligebenet og retvinktet.

A. M. Bunk.

Løsning:

A er den rette Vinkels Toppunkt i $\triangle AMN$. Man finder let $MN = b$, hvoraf ifølge det givne $AM = AN = \frac{1}{2}b\sqrt{2}$. Af $\triangle AMC$ faas $b : \sin 135^0 = \frac{1}{2}b\sqrt{2} : \sin C$, hvoraf $\angle C = 30^0$ eller 150^0; den sidste Værdi maa her forkastes, da vi maa forlange $\angle C < 45^0$. Af $\triangle ANC$ faas, idet $CN = s$, $(\frac{1}{2}b\sqrt{2})^2 = b^2 + s^2 - 2bs\cos 30^0$, hvoraf findes $s = \frac{1}{2}b(\sqrt{3} + 1)$ eller $2s = b\sqrt{3} + b$, $a + c = b\sqrt{3}$. Forlænges AB ud over B til P, saa at $BP = a$, bliver $\angle BPC = \angle BCP = \frac{1}{2}B$; af $\triangle APC$ faas da $b : \sin\frac{1}{2}B = b\sqrt{3} : \sin(30^0 + \frac{1}{2}B)$, der giver $\frac{1}{2}B = 30^0$, $B = 60^0$.

$$\angle A = 90^0, \ \angle B = 60^0, \ \angle C = 30^0.$$

Bisgaard Kristensen. (Ogsaa løst af N. Ø. Lund.)

4. Givet en stumpvinklet Trekant NMQ, hvor M er den stumpe Vinkel. Konstruer en Trekant ABC, saaledes at Højdernes Skæringspunkt falder i N, medens M og Q skal være

Digitized by Google

de Punkter, hvori h_b og v_B skærer Trekant ABC's omskrevne Cirkel.

Løsning:

Da Højdernes Skæringspunkt X og h_b's Skæringspunkt med den omskrevne Cirkel ligger symmetriske m. H. t. AC kendes AC's Retning (MX's Halveringsnormal). Da Q er V_B's Skæringspunkt med Cirklen, maa Q være $\frown AC$'s Midtpunkt og den vinkelrette fra Q paa AC gaa gennem Centrum. Dette bestemmes nu ved Skæring mellem den vinkelrette fra Q og Halveringsnormalen paa MQ, som er Korde i Cirklen. Cirklen kan tegnes med Radius OQ og B bestemmes ved Skæring mellem MX og Cirklen.

K. H. Larsen. (Ogsaa løst af Valdemar Simonsen og Paul Holst I. G. M. Aarhus Katedralskole).

5. Givet en Halvcirkel med Radius r, dens Centrum O og dens Diameter AB. Der tegnes to Cirkelbuer, een med Centrum i B og Radius AB og een med Centrum i A og Radius AO. Find Radius i en Cirkel, der er indskreven i den Figur, der begrænses af Halvcirkelen og de to sidst tegnede Cirkelbuer.

O. A. Smith.

Løsning:

Lad Cirklens Radius være x, dens Centrum C. Siderne i $\triangle ABC$ bliver, da Centerlinien for to Cirkler, der rører hinanden, gaar igennem Røringspunktet, $2r$, $2r - x$ og $r - x$, mens Medianen OC er $r + x$. Indsættes i Formlen $m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$, faas

$$x = \frac{1}{10} r.$$

Bisgaard Kristensen.
(Ogsaa løst af K. H. Larsen, Poul Holst, Ove Neergaard, Otto Peschardt, Margrethe Bie, Valdemar Simonsen og Østergaard).

6. Bestem x af Ligningen

$$\sqrt{x + \sqrt{2ax - a^2}} + \sqrt{x - \sqrt{2ax - a^2}} = x - \frac{a}{2} \qquad a > 0$$

Løsning:

Hver af Rodstørrelserne skrives paa enkelt irrational Form, og man faar

$$\sqrt{\frac{x + x - a}{2}} + \sqrt{\frac{x - x + a}{2}} + \sqrt{\frac{x + x - a}{2}} - \sqrt{\frac{x - x + a}{2}} = x - \frac{a}{2}$$

$$2\sqrt{x - \frac{a}{2}} = x - \frac{a}{2}; \quad 4\left(x - \frac{a}{2}\right) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2} - 4\right) = 0, \text{ der giver } x = \begin{cases} \frac{a}{2} \\ 4 + \frac{a}{2} \end{cases}$$

Digitized by Google

Af disse passer $x = \frac{a}{2}$ i Ligningen

$$\sqrt{x + \sqrt{2ax - a^2}} - \sqrt{x - \sqrt{2ax - a^2}} = x - \frac{a}{2}$$

medens $x = 4 + \frac{a}{2}$ passer i den forelagte Ligning.

K. H. Larsen. (Ogsaa løst af A. B. Wissing Andersen, Erik Ravn, Ejler Boe Hansen og Jens P. Halmøe Nykøbing Katedralskole).

7. Løs Ligningerne

$$x^2 - (y - z)^2 = a^2$$
$$y^2 - (z - x)^2 = b^2$$
$$z^2 - (x - y)^2 = c^2.$$

Løsning:

Skrives Ligningerne paa Formen

$$(x + y - z) \cdot (x - y + z) = a^2,$$
$$(y + z - x) \cdot (y - z + x) = b^2,$$
$$(z + x - y) \cdot (z - x + y) = c^2,$$

faas, idet vi sætter $x + y - z = \alpha$, $x - y + z = \beta$ og $-x + y + z = \gamma$, $\alpha\beta = a^2$, $\alpha\gamma = b^2$, og $\beta\gamma = c^2$, hvoraf $\alpha = \pm ab : c$, $\beta = \pm ac : b$ og $\gamma = \pm bc : a$.

Man finder da let

$$x = \pm \frac{a(b^2 + c^2)}{2bc}, \quad y = \pm \frac{b(a^2 + c^2)}{2ac} \text{ og } z = \pm \frac{c(a^2 + b^2)}{2ab}.$$

Bisgaard Kristensen. (Ogsaa løst af Skolebestyrer Edvard Zeuthen).

8. Find Summen af n Led af Rækken

$$1 + 5 + 11 + 19 + 29 \cdots\cdots\cdots$$

Løsning:

$$S_n = 1 + 5 + 11 + 19 + 29 + \cdots \text{ (}n\text{ Led)}$$
$$S_n = 1 + (2^2 + 1) + (3^2 + 2) + \cdots + (n^2 + (n - 1))$$
$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n - 1 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$
$$S_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n^2 - 3n + 1)}{3}.$$

A. B. Wissing Andersen.

(Ogsaa løst af Skolebestyrer Edvard Zeuthen, Skoleinspektør P. Kock, N. Ø. Lund; — Valdemar Simonsen, Poul Holst, Ove Neergaard, Karl Staal Petersen, Otto Peschard, Østergaard Aarhus Katedralskole; Erik Ravn — K. H. Larsen og Ejler Boe Hansen).

Digitized by Google

9. Eliminer v mellem Ligningerne

$$\frac{x}{a} = \cos v + \cos 2v, \quad \frac{y}{b} = \sin v + \sin 2v.$$

Løsning:

Oploftes til 2. Potens og adderes, faas efter nogen Reduktion

$$\cos v = \frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2} - 1.$$

Erstatter vi i den første af de givne Ligninger $\cos 2v$ med $2\cos^2 v - 1$ og indsætter den fundne Værdi for $\cos v$, faas

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 - 3\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{2x}{a} = 0.$$

Bisgaard Kristensen.

(Ogsaa løst af K. H. Larsen: — Aksel Prior og Ejler Boe Hansen Nykøbing Katedralskole).

10. I en Trekant ABC danner Længderne af c, b, a, h_c i den angivne Rækkefølge en Kvotientrække; find Vinklerne.

Løsning:

Af $c : b = a : h_c$ faas, $c = ab : h_c = 2R = c : \sin C$, hvoraf $\sin C = 1$, $\angle C = 90^0$.

Af $b^2 = a \cdot c$ faas, idet $b = c \cdot \cos A$ og $a = c \sin A$, $c^2 \cos^2 A = c^2 \sin A$, eller $1 - \sin^2 A = \sin A$, der giver

$$\sin A = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \sin A = 0{,}61805 \text{ eller } -1{,}61805.$$

Den negative Rod maa forkastes, og man finder $\angle A = 38^0\ 10'\ 30''$.

$$\angle C = 90^0, \ \angle A = 38^0\ 10'\ 30'', \ \angle B = 51^0\ 49'\ 30''.$$

Bisgaard Kristensen. (Ogsaa løst af Skolebestyrer Edvard Zeuthen.)

Opgaver til Løsning.

19. Bevis at, naar en Firkant ikke er et Parallelogram, er Summen af Sidernes Kvadrater større end Summen af Diagonalernes Kvadrater.

20. Bevis at, i et Tetraeder er Summen af Kanternes Kvadrater fire Gange saa stor som Summen af Kvadraterne

Digitized by Google

paa de tre Linier, der forbinder et Par modstaaende Kanters Midtpunkter. (19 og 20 af N. F. Jensen.)

21. Hvad er Betingelsen for, at Ligningen

$$(a_0 + ib_0)\,x^n + (a_1 + ib_1)\,x^{n-1} + \cdots + (a_n + ib_n) = 0$$

har p reelle Rødder? $p \leqq n$

(Halvor Nørregaard.)

22. Idet $b \geqq x \geqq a$ og n og p er positive hele Tal, skal man bevise Formlen

$$\int_a^b (b-x)^n\,(x-a)^p\,dx = \frac{n}{p+1}\int_a^b (x-a)^{p+1}\,(b-x)^{n-1}\,dx.$$

og derefter finde det første Integral.

23. Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem paa hinanden vinkelrette Tangenter til Keglesnittet

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1.$$

24. I et retvinklet Koordinatsystem har man givet Punkterne $A(a, 0)$ og $B(0, b)$. Find det geometriske Sted for Centrerne i de Keglesnit, der tangerer Koordinatakserne i A og B.

25. Idet $A = a + ib$ og $X = x + iy$, skal man bestemme de komplekse Værdier af X, for hvilke Brøken

$$\frac{A + iX}{A - iX}$$

bliver reel, og for hvilke Værdier, den bliver imaginær.

26. I en Trekant ABC kender man Siderne a, b og c. Find den spidse Vinkel, m_a danner med a. Eks. $A = 90^0$.

27. Skriv paa logaritmisk Form

$$\sin nA + \sin nB + \sin nC,$$

naar A, B og C er Vinklerne i en Trekant og n et positivt helt Tal. Eks. $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

28. En vilkaarlig Tangent til Kurven $y = x^4 + x^2 - 1$ skærer denne i Punkterne M og P. Find det geometriske Sted for Midtpunktet af MP.

Digitized by Google

29. Løs Ligningerne

$$\sin x = \operatorname{tg} y, \qquad \cos y = \operatorname{tg} x.$$

(22—29 af O. A. Smith.)

30. Paa en vilkaarlig Trekants Sider a, b og c tegnes Kvadrater, som falder udenfor Trekanten. Disse Kvadraters ydre Vinkelspidser forbindes med de rette Linier a_1, b_1, c_1, saaledes at disse ikke skærer Kvadraterne. Derefter tegnes Kvadrater paa a_1, b_1 og c_1, som ligeledes falder udenfor Figuren og disses ydre Vinkelspidser forbindes ved Linierne a_2, b_2, c_2 paa samme Maade som før.

1⁰. Bevis, at $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$
$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 16(a^2 + b^2 + c^2)$

2⁰. Hvilken Egenskab har de mellem Kvadraterne beliggende Trapezer.

31. I en Division er Dividenden et femcifret Tal, Kvotienten 16 større end Divisor og Divisor 55 større end Resten. Bestem: 1⁰ den mindst mulige Værdi af Dividenden og 2⁰ Værdien af Cifret t, naar Dividenden er $58t79$.

32. Idet $c_0, c_1, c_2 \cdots c_n$ er Koefficienterne til Leddene i $(1 + x)^n$ udviklet efter Binomialformlen, skal man vise, at

$$c_0 - \tfrac{1}{2} c_1 + \tfrac{1}{3} c_2 - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} c_n = \frac{1}{n+1}$$

(30—32 efter School Science and Mathematics.)

33. Til en Trekants indskrevne Cirkel lægges Tangenter parallele med Siderne a, b og c. Find Forholdet mellem Arealerne af den fremkomne Sekskant og den givne Trekant.

34. Man har givet en Cirkel og i denne en Periferivinkel. Konstruer en Cirkel, der rører Vinklens Ben og den givne Cirkel.

35. Forholdet mellem Benet og Grundlinien i en ligebenet Trekant er m $(m > 1)$. Bestem Værdien af Forholdet mellem de Arealer, hvori den vinkelrette paa Midten af et af Benene deler Trekanten.

Digitized by Google

36. Løs Ligningerne

$$x^2 + y^2 - 2ax + 2by = 0$$
$$xy + bx - ay = 2ab$$

og giv en grafisk Fremstilling af de ved Ligningerne definerede Kurver.

37. Lad i Trekant ABC D være Endepunktet for m_a. Find Radierne i de i Trekant ADC og ADB indskrevne Cirkler udtrykt ved k, b og c, hvor vi har sat $k = m_a + \frac{a}{2}$.

(33—37 af G. M. Stensig.)

38. Find et helt Tal, der er en Primtalspotens, saaledes beskaffent, at Summen af dets alikvote Dele bliver 2451.

39. Find Maksimum og Minimum af Funktionen

$$31 \cos(x + a) - 13 \cos(x + b),$$

hvor de spidse Vinkler a og b er definerede ved

$$\cos a = \tfrac{3}{5}, \quad \cos b = \tfrac{12}{13}.$$

Grafisk Fremstilling.

(38—39 fra Journal de mathématiques elementaires.)

Opgaver til Undervisningsbrug.

33. Vis, at

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

34. Find x og y af Ligningerne

$$x^2 + y\sqrt{xy} = a, \quad y^2 + x\sqrt{xy} = b; \qquad (a > 0,\ b > 0).$$

35. Find x og y af Ligningerne

$$\frac{x}{a^2 - 1} - \frac{y}{b^2 - 1} = b^2 - a^2$$
$$\frac{x}{a^2 + 1} - \frac{y}{b^2 + 1} = b^2 + a^2$$

og gør Prøve med de fundne Værdier.

Digitized by Google

36. I et Rektangel $ABCD$ er $AB = 20$ cm, $BC = 36$ cm. Siderne BC og DA deles ved Punkterne E og F i Stykker, der forholder sig som $7:5$. Beregn 1) Længderne af Linierne AE og BF, 2) af de Stykker, hvori disse Linier deler hinanden, 3) Afstanden fra deres Skæringspunkt til Rektanglets Sider og 4) Længden af EF.

37. Vis, at Ligningen

$$(3 - 7i)x^2 - (2 + 5i)x + (-8 + 38i) = 0$$

har en reel Rod og find begge Rødder.

38. Hvorledes findes Betingelsen for, at Ligningen

$$(a + ib)x^3 + (c + id)x^2 + (e + if)x + (g + ih) = 0$$

har to reelle og en imaginær Rod. (37—38 af Halvor Nørregaard.)

39. Vis, at naar $A + B + C = 180^0$, er den mindste Værdi af Udtrykket $\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C$ lig 1.

40. Idet α, β og γ betegner Afstandene fra Vinkelspidserne i en Trekant til Røringspunkterne med den indskrevne Cirkel, skal man vise 1) at Trekanternes Areal er lig med $\sqrt{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}$ 2) at den indskrevne Cirkels Radius kan udtrykkes ved $\sqrt{\alpha\beta\gamma : (\alpha + \beta + \gamma)}$. (39—40 efter School Science and Mathematics.)

41. En Differensrække og en Kvotientrække har begge første Led 2. Produktet af Rækkernes 2det Led er 12 og Produktet af Rækkernes 3die Led er 11. Find Rækkerne.

42. Find Vinklerne i en Trekant, hvis Sider er lig med henholdsvis Siderne i en ligesidet Trekant, et Kvadrat og en regulær Sekskant, alle med samme Areal.

43. Ligningerne

$$x^2 - ax - 4 = 0$$
$$y^2 - by - 4 = 0.$$

har en fælles Rod, Vis, at dette er muligt, naar $a^2 - b^2 = 16$.

44. Find Arealet af en ligebenet Trekant, naar Grundlinien er a og Radius til den indskrevne Cirkel $\frac{a}{4}$.

45. Find x af Ligningen

$$\cos 3x + \cos x = \sin 3x + \sin x.$$

Digitized by Google

46. I Parablen $y^2 = 2px$ er F Brændpunktet og A det Punkt paa Parablens Akse, hvis Abscisse er $\frac{8}{2}p$. Bestem et Punkt P paa Parablen, saaledes at $\angle FPA$ bliver saa stor som mulig.

47. For hvilken Værdi af x bliver Udtrykket

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+2x+3}} \text{ Maksimum.}$$

48. Konstruer en Firkant, naar man kender Længderne af de Linier, der forbinder Midtpunkterne af 2 modstaaende Sider, Vinklen mellem disse Linier samt 2 paa hinanden følgende Sider.

49. 28 mand kan fuldføre et arbeide paa 20 dage, naar de arbeider 9 timer daglig.

24 mand begynder paa arbeidet, og arbeider 10 timer daglig i 5 dage. Arbeidsstyrken økes saa med 6 mand, og den daglige arbeidstid med $^1/_2$ time.

Efterat den saaledes økede arbeidsstyrke har arbeidet i 6 dage, forlater 12 mand arbeidet. I disses sted antages 12 andre som imidlertid er uøvede, og som hver daglig kun kan utføre et arbeide, som er $^2/_3$ af de tidligere arbeideres daglige arbeidsydelse.

Hvor mange timer daglig maa der nu arbeides om arbeidet skal bli færdig til fastsat tid?

50. En guldsmed har tre stykker sølv. Det ene er av finhet 940, det andet av finhet 625 og det tredje av finhet 580.

Hvis han smelter sammen de to første stykker, saa faar legeringen en finhet av 730. Hvis han smelter sammen første vg tredje stykke, faar legeringen en finhet av 740. Alle tre stykker tilsammen veier 34 kg.

Hvor meget veier hvert stykke?

51. I en ret kegle er indskrevet en kule. Keglen er overskaaret af et plan, som tangerer kulen og er parallel med keglens grundflate. Den herved fremkomne retavkortede kegle er n ganger saa stor som den indskrevne kule.

Find cosinus til den vinkel v som keglens side danner med dens akse. Hvilken er den mindste værdi n kan ha? Og hvor stor er da vinkelen v?

52. Gennem et punkt P med koordinater x_1 og y_1 er lagt en ret linje som skjærer koordinataksene i punktene A

Digitized by Google

og B. Kald midtpunktet av linjestykket AB for C. Find det geometriske sted for C, naar linjen dreier sig om punktet P. Hvad slags kurve fremstiller den fundne ligning?

(41—52 efter svenske Eksamensopgaver.)

Indsendte Spørgsmaal.

1. Hvorledes løses følgende Opgave:

Gennem et Punkt af en Parabel er dragne Liniepar, hvis Vinkel halveres af Parablens Normal. Bevis, at Forbindelseslinien mellem et saadant Liniepars andre Skæringspunkter med Parablen gaar gennem et fast Punkt. A. M. Bunk.

Ovenstaaende Sætning gælder for et vilkaarligt Keglesnit. Vælger vi det givne Punkts Tangent og Normal til henholdsvis Abscisse- og Ordinatakse, bliver Keglesnittets Ligning af Formen

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Ey = 0.$$

Et Liniepar være $y = \alpha x$ og $y = -\alpha x$, der skærer Keglesnittet i $(x_1, \alpha x_1)$ og $(x_2, -\alpha x_2)$, hvor

$$x_1 = \frac{-2E\alpha}{B\alpha^2 + 2C\alpha + A} \text{ og } x_2 = \frac{2E\alpha}{B\alpha^2 + 2C\alpha + A}.$$

Den i Opgaven omtalte Forbindelseslinie skærer x-Aksen i et Punkt, hvis Abscisse er

$$\frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{y_2 - y_1} = \frac{2x_1 x_2}{x_2 + x_1} = 2\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)^{-1} = -\frac{E}{2C},$$

hvorved Sætningen er bevist. O. A. S.

Til Tidsskriftets Læsere.

Da der er sket Henvendelse til os om at forlænge Fristen for Afleveringen af Besvarelser paa Prisopgaverne for 1919, har vi besluttet at forlænge Afleveringsfristen til **1. Februar 1920.**

Besvarelserne bedes sendt i forseglet Konvolut til **Magister I. L. W. Jessen, Nykøbing F.**

Digitized by Google

Om Fordelingen af 9 Punkter i en Plan, saaledes at Antallet af rette Linier gennem 3 Punkter bliver saa stort som mulig.

Af H. Paulli.

1. Igennem hvert af de ni Punkter kan der i det højeste gaa 4 Linier med den forlangte Egenskab; følgelig kan det samlede Antal af saadanne Linier ikke være større end $9 \cdot 4 : 3 = 12$.

Betegner a Antallet af søgte Linier, p_1, p_2, p_3 og p_4 Antallet af Punkter, der ligger paa henh. 1, 2, 3 eller 4 af disse Linier, har man:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 9, \tag{1}$$

og, ved at optælle Punkterne paa de a Linier:

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 = 3a. \tag{2}$$

Det vil af det følgende fremgaa, at det vil være tilstrækkeligt at undersøge, om a kan være lig 10, 11 eller 12.

For disse Værdier af a har man $p_1 = 0$. Hvis der nemlig i en Fordeling af de ni Punkter indgik et Punkt af p_1-Klassen, vilde man, ved at borttage dette Punkt, faa en Fordeling af 8 Punkter med et Antal Linier gennem 3 Punkter, der var $\geqq 9$; men dette er umuligt, da Antallet af saadanne Linier ikke kan være større end $8 \cdot 3 : 3 = 8$.

For $a \geqq 11$ ses det paa lignende Maade, at man ogsaa maa have $p_2 = 0$, og for $a = 12$ desuden $p_3 = 0$.

Benyttes nu (1) og (2) til Bestemmelse af sammenhørende Værdier af p_2, p_3 og p_4 for $a = 10$, 11 eller 12, faas følgende Muligheder:

a	10	10	10	10	11	11	12
p_2	0	1	2	3	0	1	0
p_3	6	4	2	0	3	1	0
p_4	3	4	5	6	6	7	9

Heraf faas endvidere, at der i enhver Fordeling af Punkterne, der svarer til disse Værdier, kan udvælges en Linie, hvori de tre Punkter for $a = 10$ enten alle hører til p_4-Klassen eller de to af dem til p_4-Klassen og det tredie til p_3-Klassen, og for $a = 11$ eller 12 alle til p_4-Klassen. Dette ses, for $a = 10$ eller 11, ved paa de fire Linier gennem et Punkt af p_4 Klassen

Digitized by Google

at fordele de øvrige Punkter efter ovenstaaende Skema; for $a = 12$ følger det umiddelbart af, at alle Punkter hører til denne Klasse. Denne særlige Linie betegnes i det følgende med L.

2. For dernæst at undersøge, om der eksisterer Fordelinger, der svarer til de i Skemaet angivne Værdier, tænkes de ni Punkter med tilhørende Linier projicerede paa en Plan, der er parallel med Planen gennem Projektionscentret og Linien L.

Antages først, at der paa L ligger to Punkter af p_4-Klassen og et Punkt af p_3-Klassen ($a = 10$), vil Projektionen bestaa af 6 Punkter, der ligger paa 3 Systemer af Paralleler med henh. 3, 3 og 2 Linier, og saaledes, at tre af Punkterne ligger paa en ret Linie, der ikke er parallel med noget af Parallelsystemerne.

Optegner man de to Systemer af Paralleler med 3 Linier i hvert System, skal hver Linie indeholde 2 og kun 2 af de seks Punkter.

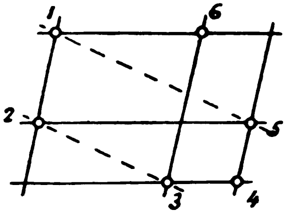


Fig. 1.

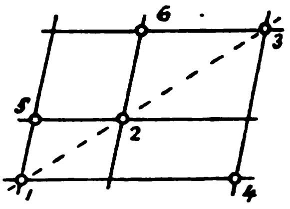


Fig. 2.

Disse kan da fordeles paa de seks Linier paa de to væsentlig forskellige Maader, som er vist i Fig. 1 og 2. I Fig. 1 er Parallelsystemerne lagt saaledes, at to af Forbindelseslinierne mellem de seks Punkter bliver parallele, ($15 \neq 23$); desuden skulde der kunne indlægges en ret Linie gennem tre af Punkterne, hvad der ikke er muligt. I Fig. 2 er Parallelsystemerne derimod lagt saaledes, at tre af Punkterne ligger ud i en ret Linie (1, 2 og 3). Parallelsystemerne skulde endvidere være saaledes beliggende, at to af de øvrige seks Forbindelseslinier mellem Punkterne (16, 24, 35, 45, 46 og 56) bliver parallele. Da dette heller ikke er muligt, kan ingen af de undersøgte Fordelinger indeholde en Linie L med to Punkter af p_4-Klassen og et Punkt af p_3-Klassen.

Tænkes dernæst de ni Punkter med tilhørende Linier pro-

Digitized by Google

jicerede paa samme Maade som ovenfor, idet L nu antages at indeholde 3 Punkter af p_4-Klassen, vil Projektionen for $a = 10$ bestaa af 6 Punkter, der ligger paa 3 Systemer af Paralleler med 3 Linier i hvert, for $a = 11$ desuden af en ret Linie gennem tre af Punkterne, og for $a = 12$ to saadanne Linier.

De to Parallelsystemer i Fig. 1 og 2 skal da her være saaledes beliggende, at tre af de øvrige Forbindelseslinier mellem Punkterne er parallele. Dette kan ikke finde Sted ved den i Fig. 2 viste Fordeling af de seks Punkter, og i Fig. 1 maa de to Parallelsystemer ligge saaledes, at 23, 14 og 65 er parallele, som vist i Fig. 3, hvor Sekskanten 1 2 3 4 5 6 er bestemt ved de tre vilkaarlig valgte Retninger 14, 25 og 36 for Parallelsystemerne og ved Beliggenheden af Punkt 1.

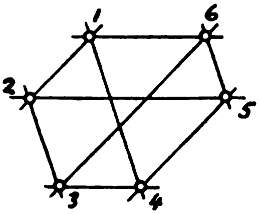


Fig. 3.

Da tre af disse Punkter ikke kan ligge ud i en ret Linie, kan man ikke have $a = 11$ eller 12, og man faar følgelig, at enhver Fordeling af 9 Punkter i en Plan, saaledes at Antallet af rette Linier gennem 3 Punkter er saa stort som mulig ($a = 10$), er en Centralprojektion af en Sekskant af den i Fig. 3 angivne Form og af Planens uendelig fjerne Linie. Af Punkterne hører de seks til p_3-Klassen og de tre til p_4-Klassen, svarende til Tallene i den første lodrette Række i omstaaende Skema.

Sekskanten 1 2 3 4 5 6 (Fig. 3) er en speciel Form af en Pascal's Sekskant; det samme gælder da ogsaa for Fordelingen af de ni Punkter: de seks Punkter af p_3-Klassen skal ligge i Vinkelspidserne af en Pascal's Sekskant, hvori de tre Diagonaler gennem modstaaende Vinkelspidser gaar gennem de modstaaende Siders Skæringspunkter, og de tre Punkter af p_4-Klassen i de modstaaende Siders Skæringspunkter.

3. Til Bestemmelse af Fordelingerne af de ni Punkter kan der f. Eks. være givet de tre Punkter paa Linien L og to andre Punkter, hvis Forbindelseslinie ikke gaar gennem noget af de tre Punkter paa L.

Betegnes de to Punkter udenfor L med 1 og 3, vil der paa de seks Linier gennem disse og de tre Punkter paa L (se Fig. 4, 5, 6 og 7, hvori Liniebundterne gennem 1 og 3 og Linien L er kongruente i Fig. 4 og 6, og ligesaa i Fig. 5 og 7) kunne indlægges 3 Punkter (betegnede i Fig. med 2, 4 og 6)

Digitized by Google

paa 2 og kun 2 Maader, saaledes at der paa hver af de seks Linier ligger 3 Punkter. Bestemmes dernæst Punkt 5 ved Skæring mellem 49 og 67, faar man, da 1 2 3 4 5 6 som Følge af Konstruktionen er en Pascal's Sekskant, ved at gennemløbe denne i Rækkefølgen 3 6 5 2 1 4, at 25 gaar gennem 8.

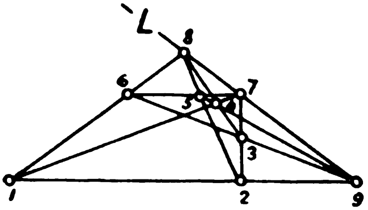


Fig. 4

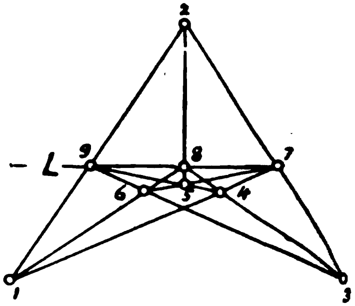


Fig. 5.

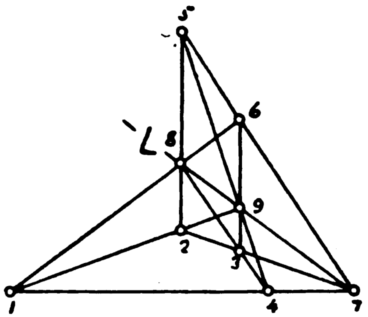


Fig. 6.

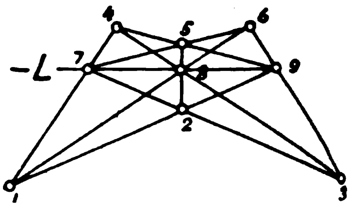


Fig. 7.

Efter den Maade, hvorpaa Linien L deler de seks Punkter udenfor denne i 2 Grupper med 6 og 0, 5 og 1, 4 og 2, 3 og 3 Punkter, faas 4 Arter af Fordelinger, som der er givet Eksempler paa i Fig. 4, 5, 6 og 7.

4. Om Konstruktionen af den specielle Pascal's Sekskant, hvortil Fordelingen af de ni Punkter er knyttet, skal endnu gøres en Bemærkning.

Antages Sekskanten 1 2 3 4 5 6 (Fig. 4) at være indskrivelig en Cirkel, og inverteres denne om et Centrum, der ligger paa Linien L, vil de til Punkterne 1, 2, 3, 4, 5 og 6 svarende inverse Punkter 1′, 2′, 3′, 4′, 5′ og 6′ ligeledes være Vinkelspidser i en Pascal's Sekskant af den betragtede specielle Art, ifølge en bekendt Sætning om Inversion af en Cirkel med et

Digitized by Google

S

dertil hørende System af Korder gennem et og samme Punkt.

Vælges som Inversions-Centrum et af de to Punkter, P, for hvilke Kvadratet paa Afsnittet $7P$ er lig med Potensen af Punkt 7 m. H. t. Cirklen, bliver Linierne $1'4'$, $2'3'$ og $5'6'$ parallele med L, da man af de ligedannede Trekanter $7P4$ og $71P$ faar $\angle 7P4 = \angle 71P$, og ifølge Inversionen har: $\angle 71P = \angle 1'4'P$.

I den inverse Cirkel med Sekskanten $1'2'3'4'5'6'$ (Fig. 8) har man, da $1'2'$, $3'6'$ og $4'5'$ gaar gennem et og samme Punkt:

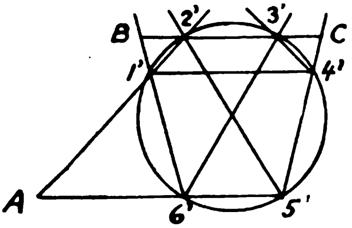


Fig. 8.

$$\frac{A6'}{2'3'} = \frac{6'5'}{3'C} \tag{3}$$

og af $\triangle A6'1' \sim 2'B'1'$:

$$\frac{1'2'}{A1'} = \frac{2'B}{A6'}. \tag{4}$$

Ved Multiplikation af (3) og (4) faas, idet $3'C = 2'B$:

$$\frac{A6' \cdot 1'2'}{2'3' \cdot A1'} = \frac{6'5'}{A6'}. \tag{5}$$

Endvidere har man: $A5' \cdot A6' = A1' \cdot A2'$. (6)

Indsættes i (5) og (6) $1'2' = a$, $2'3' = b$, $A6' = x$, $A1' = y$, $A5' = z$, faas:

$$\frac{a \cdot x}{b \cdot y} = \frac{z - x}{x} \tag{5 a}$$

og

$$z \cdot x = y(y + a), \tag{6 a}$$

hvoraf ved Elimination af z:

$$ax^3 + bx^2y - aby^2 - by^3 = 0. \tag{7}$$

Naar Punkterne $1'$, $2'$, $3'$ og $4'$ er givne, bestemmes $6'$ som Skæringspunkt mellem Cirklen og den Kurve af 3die Grad, hvis Ligning i et skævvinklet Koordinatsystem med Akserne $1'4'$ og $1'A$ er fremstillet ved (7).

Denne særlige Form af den betragtede specielle Pascal's Sekskant kan saaledes ikke i Almindelighed konstrueres med Passer og Lineal.

Følgelig gælder dette ogsaa almindeligt for den i et Kegle-snit indskrevne specielle Pascal's Sekskant.

Digitized by Google

Den ovenfor angivne Inversion om et Centrum i Forbindelseslinien mellem de modstaaende Siders Skæringspunkter kan finde Anvendelse, naar man i en Cirkel vil indskrive en speciel Pascal's Sekskant, hvori de modstaaende Siders Skæringspunkter har indbyrdes endelige Afstande, idet man først konstruerer den i Fig. 8 viste særlige Form af Sekskanten, ved at optegne tilstrækkelig mange Punkter af Kurven (7) til Bestemmelse af dens Skæring med Cirklen og derpaa inverterer Figuren om et Centrum i Forbindelseslinien mellem de modstaaende Sider.

Regningsarters Gyldighedsomraade.

Af mag. art. E. Palmø.

At benævnte Størrelser ikke kan multipliceres med benævnte Størrelser, følger af Multiplikationens Væsen. Derimod antages de almindeligt at kunne adderes, subtraheres og divideres indbyrdes, saafremt de kan gøres ensbenævnte. Jeg ved ikke, om nogen tidligere har gjort opmærksom paa de Meningsløsheder, denne almindelige Regel om Henførelse til fælles Benævnelse som Betingelse for den indbyrdes Addition, Subtraktion og Division af uens benævnte Størrelser kan føre til; da jeg for nylig kom til at tænke nærmere over den, efterlod den i hvert Fald hos mig et Problem, hvis Brod jeg først efter adskillig Spekulation blev befriet for. Resultatet kan sikkert interessere flere og skal her fremsættes i al Korthed.

Hvis det var en tilstrækkelig Betingelse for Subtraktion og Division af uens benævnte Størrelser, at de blot forinden Regneoperationen skulde gøres ensbenævnte, saa vilde — da alt kan gives samme Benævnelse — alle Størrelser kunde fradrages fra og deles med hverandre. Eks. 4 Heste — 2 Køer = 4 Dyr — 2 Dyr = 2 Dyr; 4 Heste : 2 Køer = 4 Dyr : 2 Dyr = 2. En Regel, der synes at føre til saadanne Absurditeter som Muligheden af at borttage 2 Køer, hvor der i Forvejen kun er 4 Heste, eller at 2 Køer er indeholdt to Gange i 4 Heste, maa aabenbart trænge til nøjere Eftersyn. Urigtig i alle Tilfælde lader den ikke til at være; thi ved Addition synes den altid

indvendingsfri, Eks: 4 Heste + 2 Køer = 6 Dyr; 9 Huse + 7 Agurker = 16 Ting. Ligeledes er den tilladelig i mange Tilfælde af Subtraktion og Division, Eks.: 3 Femogtyveører — 7 Tiører = 3 · 0,25 Kr. — 2 · 0,10 Kr. = 0,55 Kr.; 4 m : 2 cm = 400 cm : 2 cm = 200.

Da Reglen saaledes snart viser sig rigtig, snart absurd, er den formodentlig for almindelig affattet, hvilket igen vil sige, at enten selve dens Indhold (Fordringen om at henføre Størrelserne til samme Benævnelse) eller dens Gyldighedsomraade maa reduceres. Saa længe intet nærmere er bestemt, maa den nemlig antages at skulle gælde for alle Arter af Genstande.

For at blive klar over, hvilken Reduktion, der skal foretages, undersøger vi de forskellige Benævnelser. For Kr. og Øre, m, km og cm, kg, hg og g o. s. v. passer Regelen i alle tre Regningsarter, kort sagt: det viser sig, at den gælder uden Indskrænkning for alle vedtægtsmæssige d. v. s. alle nøjagtigt ved vilkaarlig Definition afgrænsede Maalbegreber. For alle andre uens benævnte Størrelser synes den kun at kunne anvendes ved Addition. Men hvis jeg kan sætte 4 Heste + 2 Køer = 4 Dyr + 2 Dyr, hvorfor maa jeg da ikke skrive 4 Heste — 2 Køer = 4 Dyr — 2 Dyr? Lad mig spørge Logikken og Matematikken, om der er noget at indvende mod nogen af disse Ligninger. (Min tredie store Læremester, Erfaringen, siger mig nok, at jeg ikke kan fradrage 2 Køer, hvor der kun er 4 Heste; men hvilken Regel, jeg til Slut skal opstille, angiver den ikke).

Logisk betragtet er det, jeg i de to ovennævnte Eksempler har foretaget mig for at naa fra venstre til højre Side af Lighedstegnet, at ombytte de to Begreber Heste og Køer med et fælles overordnet Begreb: Dyr. Logiken siger nu, at saadan Ombytning med et overordnet Begreb ingenlunde er tilladelig i alle Tilfælde — erstatter jeg saaledes i Sætningen »Fuglene har Vinger«, Fuglene med det overordnede Begreb Hvirveldyrene, kommer jeg til den urigtige Paastand »Hvirveldyrene har Vinger« — men naar saadan Ombytning tør finde Sted, og om den i disse specielle matematiske Operationer er tilladelig eller ej, giver den formale Logik naturligvis ikke Svar paa. Den har altsaa blot belært mig om, at det ikke uden videre er sikkert, at 4 Heste ± 2 Køer = 4 Dyr ± 2 Dyr.

Gaar vi nu til Matematikken, saa afviser den Diskussionen om Benævnelserne som sig uvedkommende; Aritmetikken har

Digitized by Google

kun med Talbegreber at gøre. Derimod siger den mig, at Lighedstegnet kun tør bruges, hvor Omvending af Ligningens to Led er mulig. Men saa tør jeg ikke sætte 4 Heste = 4 Dyr; 2 Køer = 2 Dyr, da de omvendte Paastande ikke gælder. Altsaa er det ogsaa urigtigt at skrive 4 Heste + 2 Køer = 4 Dyr + 2 Dyr. Sætningen: 4 Heste og 2 Køer er 6 Dyr, kan ikke vendes om; den er nemlig ikke som den matematiske Ligning en Identitets- eller Kongruensdom men en Subsumtionsdom

Den eneste af de tre Regneoperationer, der synes at kunne anvendes paa konkrete uens benævnte Ting, var Additionen. Nu viste ogsaa denne sig utilladelig i matematisk Form, altsaa som anvendt Matematik. Man maa ikke skrive »4 Sønner + 3 Døtre = 7 Børn«, thi da Omvending ikke er tilladelig, kan Lighedstegnet ikke med Rette bruges; der maa skrives »4 Sønner og 3 Døtre er (et specielt Tilfælde af) 7 Børn.« Dermed er indbyrdes Addition, Subtraktion og Division mellem uens benævnte Størrelser indskrænket til de Maalbegreber, der er udtømmende bestemt ved Definition, altsaa er rene Begreber. Paa dette Omraade gælder da ogsaa den gamle Regel uindskrænket; thi da en Øre er fuldstændig og udtømmende bestemt som $\frac{1}{100}$ Kr. og en Kr. som 100 Øre, har man her Lov at sætte Lighedstegn: 1 Kr. = 100 Øre og omvendt; 1 kg = 1000 gr. og omvendt. Saa er det ogsaa ubestrideligt, at 2 Kr. — 2 Øre = 200 Øre — 2 Øre; 5 hl : 2 l = 500 l : 2 l.

Da det nu er vist, at de tre Regningsoperationer mellem uensbenævnte Størrelser altid gælder for og kun for de konventionelle Maalbegreber, er vi endelig i Stand til at foretage den paakrævede Omskrivning af den gamle almindelige Regel. Den maa lyde saaledes: *At uens benævnte Størrelser kan adderes, subtraheres og divideres indbyrdes efter at være gjort ens benævnte, gælder kun og altid for de ved Definition skabte Maalbegreber, der kan henføres til et fælles definitionsbestemt Maalbegreb.* Andre uens benævnte Størrelser kan vel altid sammentælles, men Additionen maa ikke opstilles som Ligning. I en Lærebog i praktisk Regning, maa den tidligere saa ofte anførte Regel ændres derhen: Naar du vil addere, subtrahere eller dividere uens benævnte Størrelser med hinanden ved at forvandle dem til en fælles Benævnelse, maa alle tre eller begge Benævnelser findes i Maalsystemet.

Digitized by Google

Dette er et Eksempel paa, at naar Matematikken, der kun har med »selvskabte« Begreber at gøre, skal anvendes paa konkrete Ting, maa man i nogle Tilfælde først overføre dens Regler paa andre »selvskabte« Begreber (Maalenhederne). Disse sidste Begreber staar da for den almindelige Opfattelse, som Symboler for de konkrete Ting. Men det bliver da egentlig ikke disse sidste i deres fulde sansebare Virkelighed, vi underkaster de matematiske Operationer, men kun saadanne Egenskaber ved dem, som symboliseres af Maalbegreberne. Altsaa Tingenes kvantitative Egenskaber, vil man maaske sige; er det for omfattende en Angivelse af Matematikkens Brugbarhed, at den anvendes paa Sansetingene, saa maa man dog have Lov at paastaa, at den anvendes paa Tingenes Kvanta. Men ovenstaaende Udvikling viser, at denne Bestemmelse ogsaa maa indskrænkes. Hvis en algebraisk Ligning skal have praktisk Betydning, maa man i dens Led ikke indsætte hvilke som helst tællelige Størrelser; men disse maa enten være givne som ensartede, ensbenævnte eller, hvis de er givne som uensbenævnte, opfylde følgende to Betingelser: for det første være Maalbegreber (ikke Konkretioner) og for det andet oven i Købet kunne omsættes til et fælles Maalbegreb. Som man ser: en ret betydelig Indskrænkning af Matematikens Anvendelser.

Smaa-Afhandlinger.

Lidt elementær algebraisk Systematik.

Af Adjunkt B. P. Bertelsen.

Naar man i den elementære Algebra kommer til Potens, Rod og Log, møder man som Regel i Lærebøgerne Udtrykkene: De 5 Potenssætninger, de 5 Rodsætninger, de 4 Logaritmesætninger. Det Spørgsmaal har sikkert meldt sig for adskillige Elever: hvorfor de fem, de fem, de fire og ikke et hvilketsomhelst andet Antal. Det er mine Erfaringer, at det lønner sig at ofre et Par Minutter paa at stille Eleverne Ansigt til Ansigt med det Spørgsmaal. Svaret er jo let. Det kan gives paa følgende Maade:

Forud for Potens gaar de fire Regningsarter, hvis Symboler

Digitized by Google

er $(a+b)$, $(a-b)$, $(a \cdot b)$ og $\frac{a}{b}$. Indfører man nu et nyt Symbol a^m, maa man nødvendigvis faa 9 nye Udtryk, nemlig det nye Symbol anvendt paa de fire foregaaende: $(a+b)^n$; $(a-b)^n$; $(a \cdot b)^n$ og $\left(\frac{a}{b}\right)^n$. Dernæst de fire foregaaende Symboler anvendt paa det nye Symbol: $(a^m + b^p)$; $(a^m - b^p)$; $a^m \cdot b^p$ og $\frac{a^m}{b^p}$ med de tilhørende Mulighedsbetingelser: $a = b$ og $m = p$ for de to første Udtryk, $a = b$ eller $m = p$ for de to sidste. Tilsidst faar man det nye Symbol anvendt paa sig selv, hvilket giver: $(a^n)^p$. Resultatet af dette sidste: $a^{n \cdot p}$ fører ind i en ny Række a^{m+p}, a^{m-p}, $a^{m \cdot p}$, $a^{\frac{m}{p}}$ a^{m^p}. Dermed er Systemet i Orden for Potens Vedkommende.

Gaar man nu til Rod, faar man paa samme Maade

Rod anvendt paa de fem foregaaende Symboler.

$$\sqrt[n]{a+b},$$
$$\sqrt[n]{a-b},$$
$$\sqrt[n]{a \cdot b},$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$
$$\sqrt[n]{a^p}.$$

De fem foregaaende Symboler anvendt paa Rod.

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[p]{b},$$
$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[p]{b},$$
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[p]{b},$$
$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[p]{b},$$
$$(\sqrt[n]{a})^p.$$

Rod anvendt paa Rod.

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}.$$

Ved at gennemgaa ovenstaaende mangler man kun $\sqrt[np]{a^{nq}} = \sqrt[p]{a^p}$ af de Udtryk, der almindelig behandles. Dette Udtryk hører altsaa ikke til det algebraiske System, men tages med samme nødvendig Regneregel bl. a. af Hensyn til Rodstørrelsers Multiplikation og Division.

For Logaritmer faas paa samme Maade:

Digitized by Google

$$
\begin{array}{ll}
\log(a+b), & \log a + \log b, \\
\log(a-b), & \log a - \log b, \\
\log(a\cdot b), & \log a \cdot \log b, \\
\log\left(\frac{a}{b}\right), & \log a : \log b, \\
\log a^m. & (\log a)^m, \\
\log \sqrt[m]{a}\ . & \sqrt[m]{\log a}\ .
\end{array}
$$

$$\log(\log a)$$

Bemærkninger om Potenssummer.

I Anledning af »Potenssummer« i 3. Hefte af P. Kock gør jeg opmærksom paa følgende simplere Udledelse, som maaske ikke er alm. kendt:

$$2^{p+1} = (1+1)^{p+1} = 1^{p+1} + \binom{p+1}{1} 1^p + \binom{p+1}{2} 1^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{p} \cdot 1 + 1,$$

$$3^{p+1} = (2+1)^{p+1} = 2^{p+1} + \binom{p+1}{1} 2^p + \binom{p+1}{2} 2^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{p} \cdot 2 + 1,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(n+1)^{p+1} = (n+1)^{p+1} = n^{p+1} + \binom{p+1}{1} n^p + \binom{p+1}{2} n^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{p} n + 1.$$

Ved Addition finder vi:

$$(n+1)^{p+1} = \binom{p+1}{1} \Sigma n^p + \binom{p+1}{2} \Sigma n^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{p} \Sigma n + (n+1),$$

eller

$$\binom{p+1}{1} \Sigma n^p + \binom{p+1}{2} \Sigma n^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{p} \Sigma n = (n+1)^{p+1} - (n+1),$$

Ved heri efterhaanden at sætte $p = 1, 2, 3, 4, \cdots$ faar man bestemt Σn, Σn^2, Σn^3 o. s. v.

Eks.:

$$\binom{2}{1} \Sigma n = (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + n,$$

$$\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\binom{3}{1} \Sigma n^2 + \binom{3}{2} \Sigma n = (n+1)^3 - (n+1) = (n+1)(n^2+2n).$$

Digitized by Google

$$\binom{3}{1} \Sigma n^2 = (n+1)(n^2+2n) - \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{2}.$$

$$\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bestemmelse af en Differentialkvotient.

Af Gymnasieelev Tage Larsen.

Kurven $y = f(x)$ antages at være kontinuert, entydig og stadig stigende. Længden af Kurven regnet fra dens Skæringspunkt med Y-Aksen til dens Skæringspunt med en Linie gennem $(x,0)$ parallel med Ordinataksen maa være en Funktion af x og skrives $g_1(x)$. Denne Funktion er voksende med voksende x.

Funktionerne $g_2(x)$ afledes nu af $g_1(x)$ paa ganske samme Maade som $g_1(x)$ blev afledet af $f(x)$. Ad analog Vej indfører man dernæst Funktionen $g_3(x), g_4(x) \cdots, g_n(x), \cdots$.

Man ser, at Kurverne $y = g_1(x), y = g_2(x), y = g_3(x)$ o. s. v. maa være kontinuerte, entydige og stadig stigende, og man kan da vise, at

$$D_x g_n(x) = \sqrt{n + f^1(x)^2}.$$

Som bekendt har man, at $D_x g_1(x) = \sqrt{1 + f^1(x)^2}$, og paa samme Maade faar man:

$$D_x g_{p+1}(x) = \sqrt{1 + [D_x g_p(x)]^2},$$

men dernæst kan man let gennemføre det fuldstændige Induktionsbevis.

Litteraturanmeldelser.

Archimedes Sandregning og Aristarchos fra Samos. »Solens og Maanens Størrelse og Afstand«. Ved S. A. Christensen. (Nykjøbing Katedralskoles Aarsprogram 1919). (En foreløbig Anmeldelse).

Man maa være Dr. phil. S. A. Christensen meget taknemlig, fordi han har gjort ovennævnte to Skrifter tilgængelige for os. Efter indledende Bemærkninger giver Oversætteren en kort og klar Fremstilling af Archimedes Tallære, hvorefter følger Gen-

Digitized by Google

givelsen af Afhandlingen om Sandregningen. I et kort Forord bemærker Oversætteren, at Formaalet med Udgivelsen af Afhandlingen er at vise vore Elever i Gymnasiet et Billede af græsk, matematisk Arbejde fra Grækenlands Blomstringstid i Oldtiden, og dette er i fuldeste Maal lykkedes Udgiveren. Da jeg i flere Aar i det matematiske Gymnasium har benyttet Seminarøvelser i 2den og 3die Gymnasieklasse, har Fremkomsten af dette Arbejde skaffet mig en stor Tilfredsstillelse, idet jeg har tildelt Arbejdet til en Elev i 2den Gymnasieklasse, og jeg glæder mig meget til at høre, hvad han har faaet ud ved Læsningen af Arbejdet; jeg skal da senere, efter at have hørt ham »læse over Arbejdet«, vende tilbage til Værket og meddele, hvad Indtryk han har faaet. Jeg mener ogsaa at imødekomme Oversætteren med en saadan Prøve, idet han derved vil faa konstateret, om »Eleverne paa den matematisk-naturvidenskabelige Linie kan læse Afhandlingen«, hvad der synes at være en af Grundene til Udgivelsen af Afhandlingen. Men vi andre, som ikke magter det græske Sprog, har kun Tak til Dr. Christensen, fordi han gør de græske Værker tilgængelige for os, og vi haaber og beder ham fortsætte og saa bevirke, at Afhandlingerne kan samles i Bogform, saa enhver kan faa dem i Hænde.

Jeg tror, at det er et lykkeligt Valg at udgive netop de to interessante Afhandlinger, der ved deres Indhold vil tiltale vore flinke Gymnasieelever.

Foreløbig kun en Tak for Afhandlingerne, en nærmere Anmeldelse skal senere fremkomme. O. A. S.

* * *

J. S. Hedstrøm og C. Rendahl: Algebra. — Trigonometri. — Trigonometri for Latinlinjen. (Anmeldt af Adjunkt Sigurd Kristensen, Horsens).

Danske Gymnasielærere vil have Fornøjelse af at gøre Bekendtskab med ovennævnte svenske Lærebøger. Selvfølgelig maa man, naar man vil vurdere dem, tage Hensyn til, at Fordringerne og vel ogsaa Formen for Matematikundervisningen i de svenske Gymnasier er noget forskellige fra Forholdene her, men netop denne Forskel giver Bøgerne forøget Friskhed for danske Læsere.

Betydeligst af Bøgerne er vel nok Algebraen. Forfatteren

Digitized by Google

siger i Fortalen: »Foreliggende Bog er en Opgavesamling svarende til Gymnasiets Pensum i Algebra og Funktionslære, men derimod ingen Lærebog. En saadan er efter vor Mening unødvendig. Hovedvægten ved Undervisningen maa lægges paa Lærerens mundtlige Fremstilling i Samarbejde med Eleverne. Dog findes efter hvert Afsnit en Sammenfatning af det vigtigste af det, som er behandlet paa Skolen, og som Eleverne bør gennemgaa hjemme«.

Og Bogen er udarbejdet i nøje Overensstemmelse med ovenstaaende Program. En saadan Form for Gymnasieundervisning kan synes dristig, og Betingelsen for, at den kan gennemføres med Udbytte maa være, at Læreren er i Besiddelse af stor faglig og pædagogisk Sikkerhed. Men naar man hører, at Bogen indeholder 1247 Opgaver, vil man forstaa, at Eleverne, naar de har gennemarbejdet Bogen under kyndig Vejledning, kan opnaa stor Sikkerhed i Opgaveregning og god matematisk Forstaaelse.

Noget andet er, at Beviserne i »Sammenfatningen« er meget kortfattede, og at man nok paa flere Punkter kunde ønske en noget mere udtømmende Behandling; navnlig af Hensyn til de svagere Elever, der vil have svært ved at holde fast paa Stoffet uden noget trykt Hjælpemiddel, og hvis Optegnelser paa Klassen jo maa anses for ret værdiløse. Jeg mener altsaa, at der er en Fare for, at den tekniske Færdighed udvikles paa den matematiske Forstaaelses Bekostning. Fremstillingen er forøvrig klar og nøjagtig. Den støtter sig i stor Udstrækning paa grafisk Afbildning; som særlig smukke Eksempler herpaa vil jeg nævne en Bestemmelse af $\lim\limits_{x=a}\frac{f(x)}{g(x)}$, naar $f(a)=g(a)=0$, og Bestemmelsen af Summen af en Differensrække og en Kvotientrække.

Men Opgaverne er som sagt Hovedsagen, og her vil for danske Lærere være en Lejlighed til en kærkommen Forøgelse af de ikke for talrige gode Opgavesamlinger, vi har. Hvor der har været Lejlighed dertil, har Forfatterne hentet deres Opgaver fra det praktiske Liv. Som et lille Krydderi indeholder Bogen til sidst tre Kapitler om Fejlberegning, om Forholdstalsvalg og om Livsforsikring. Det sidste er vel nok noget svært, men vil dog sikkert kunne læses med Udbytte og Fornøjelse; det er lidt beklageligt, at ingen danske Lære-

Digitized by Google

bøger indeholder Elementerne af denne saa almindelig forekommende og uhyre nyttige Side af den anvendte Matematik.

Hvad de to Lærebøger i Trigonometri angaar, saa er det ogsaa her i første Række det gode Opgavevalg og den stærke Brug af grafisk Afbildning, man lægger Mærke til. Disse to Bøger er ellers skrevet som almindelige Lærebøger. Lærebogen for Realgymnasiet er opbygget koncentrisk, saaledes at de 6 første Kapitler, som antages læst i 2den Klasse, er det samme som Trigonometrien for Latingymnasiet. De trigonometriske Funktioner indføres her først for spidse Vinkler gennem den retvinklede Trekant, senere for alle Vinkler ved Hjælp af Koordinaterne for Punkter paa Enhedscirklen, en Definition, som senere fører til en elegant og simpel Udledning af Udtrykket for $\cos(x - y)$. Endvidere medtages almindelig Trekantsberegning i noget mindre Omfang end i vort matematiske Gymnasium, samt en Del udmærkede praktiske Anvendelser af Trigonometrien. I det sidste Afsnit behandles derefter Vinklens Ændring, Funktionernes Differentialkvotienter og trigonometriske Ligninger. Disse er meget kortfattet behandlede, men Opgaverne er gode og giver Eksempler paa de almindelig forekommende Arter. Bogen ender med en udmærket Samling blandede Opgaver, der viser Trigonometriens Betydning for mange i Praksis forekommende Beregninger. Bøgerne er rigt udstyret med Tavler og Afbildninger f. Eks. en Afbildning af $y = \sin 2x + 2 \sin x$. Udstyret er meget tiltalende paa fint glittet Papir og med klart Tryk.

*　　*　　*

Mathematisch - physikalische Bibliothek (B. G. Teubner):

E. Löfler: Ziffern und Ziffernsysteme I—II, 2. Auflage 1919.

O. Meissner: Wahrscheinlichkeitsrechnung I—II, 2. Auflage 1919.

W. Ahrens: Mathematikeranekdoten, 1916.

A. Leman: Vom periodischen Dezimalbrüch zur Zahlentheorie, 1916. (Anmeldt af cand. mag. G. M. Stensig, Nykøbing F.).

Under den foranstaaende Fællestitel er paa det Teubnerske Forlag udkommet og udkommer stadig en Række Smaaskrifter

Digitized by Google

der tilsigter at give et Indblik i forskellige fra Matematikens Omraade hentede Emner, der ikke behandles ved Skoleundervisningen.

Flere af disse Hefter har iøvrigt tidligere været anmeldt i »Nyt Tidsskrift for Matematik A«, Aargang 1914 pg. 33. Hvert lille Bind af Samlingen er paa omtrent 50 Sider og som Regel forsynet med Litteraturfortegnelse og oplysende Noter. Udstyrelsen er upaaklagelig, selv om man nok kan se Forskel paa en Udgave fra 1916 og en fra 1919.

Løfflers lille Bog giver en velskrevet og meget interessant Oversigt over Talskrivningens Historie. Efter at der i Indledningen er gjort Rede for Taltegnenes Væsen og Betydning, gennemgaas Talskrivningen hos de gamle Kulturfolk, idet der gives en Mængde Oplysninger om forskellige Ting, der knytter sig til det behandlede Stof. Bogens sidste Del handler væsentligst om Talskrivningen hos Romerne, Inderne, Araberne og Kineserne.

Den af Meissner skrevne Sandsynlighedsregning er vel egnet til at give en første Orientering i denne Gren af Matematiken; der medtages ikke helt faa Sætninger med passende Anvendelser.

I Lemans Skrift er Udgangspunktet en omfattende Behandling af periodiske Decimalbrøkers Egenskaber, hvorefter følger en Udvikling af forskellige talteoretiske Sætninger. I Teksten er der indflettet Øvelseseksempler og Opgaver med Løsning.

* * *

Aus Natur und Geisteswelt (B. G. Teubner): G. Kowalewski: Einführung in die Infinitesimalrechnung, 3. Auflage 1919. P. Crantz: Analytische Geometrie der Ebene zum Selbstunterricht, 2. Auflage 1919. (Anmeldt af cand. mag. G. M. Stensig.)

Disse to Bøger indeholder en Stofmængde, der omtrent svarer til den, der paa Gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige Linie læses indenfor de paagældende Discipliner.

Kowalewski er bekendt som Forfatter til en større Lærebog i Differential- og Integralregning. Den foreliggende Bog af K. giver først nogle Hovedsætninger fra den almindelige Lære om Grænseværdier, dernæst en i mange Henseender interessant Fremstilling af Elementerne i Infinitesimalregningen.

Digitized by Google

Den ovennævnte Lærebog i analytisk Geometri behandler Keglesnittene ret udførligt. Forfatteren finder intet Steds Anledning til at bringe den rette Linies Ligning paa dens saakaldte Normalform.

* * *

Wiskundige Opgaven met de oplvssingen door leeden van Het Wiskundig Genootschap, Amsterdam 1919. (Anmeldt af cand. mag. G. M. Stensig).

Under Redaktion af Dr. Jan de Vries i Utrecht udsender den hollandske matematiske Forening, Het Wiskundig Genootschap, med visse Mellemrum Opgavesamlinger med Løsninger. Opgaverne er alle stillet og løst af Medlemmer i Selskabet.

I den foreliggende Samling findes der 24 Opgaver med udførlige Løsninger. Omtrent Halvdelen af Opgaverne er af funktionsteoretisk Art, den anden Halvdel af algebraisk-geometrisk Natur. Der findes en enkelt talteoretisk Opgave.

Opgaverne er vel nok speciellere og mere omfattende end de Opgaver, der til Skoleembedseksamen gives i Matematik.

Man vil finde Anvendelser af Eulers Summationsformel, Eksempler paa Beregning af bestemte Integraler og Udviklinger efter trigonometriske Funktioner og Cylinderfunktioner.

Flere af Opgaverne fra den algebraiske Geometri er løst ved antalgeometriske Bestemmelser.

* * *

Lektor Otto Gallander: Elementär Elektricitetslära. Albert Bonniers Förlag, Stockholm. 150 Sider. (Anmeldt af Adjunkt Chr. Jensen, København).

Det er en dygtigt og af en erfaren Lærer skrevet Lærebog. Sproget er klart og præcist, Definitioner og Forsøgsresultater er fremhævet ved særlig Tryk, hvorved Oversigten og Samlingen af Stoffet i høj Grad lettes. Forfatteren har lagt særlig Vægt paa en fyldig Fremstilling af de Dele af Elektricitetslæren, som har faaet praktisk Anvendelse, han skriver i Forordet: »Då nu växelströmmar ha en så stor använding i vårt land, torde vid den grundläggende undervisningen i fysik böra redogörgs för vad som menas med strömstyrka, spänning, $\cos\varphi$ e. t. c. vid växelström. De magnetiska grundbegrepp, på vilka elektroteknikken bygger, torde även böra gennomgås

Digitized by Google

i skolan«. — Til Indøvelse og Uddybning af Stoffet er der til Bogens forskellige Afsnit knyttet en fyldig og velvalgt Opgavesamling.

Hvad der særlig falder i Øjnene ved Gennemlæsningen af Bogen er den hyppige Anvendelse af simple og klare matematiske Formler, der ofte gør Emnet langt mere gennemskueligt end lange Forklaringer. Skal man forklare f. Eks. den trefasede Vekselstrømmaskine, men ikke ønsker at anvende Formlen: $I = I_0 \sin \omega$, faar Eleverne vanskelig nogen rigtig Forstaaelse af Maskinens Virkemaade. Om Matematikens Anvendelse i Fysikundervisningen siger Forfatteren: »Då differentialkalkyl numera studeras i våra skolor, torde det vara på tiden, att lärjungarne redan i skolan få se några tillämpningar av denna räknemetod på fysiska problem. Där fromställningen vinner i klarhet och korthet genom använding av derivator, har jag därför låtit sådanna inflyta«. Mon vi ikke paa dette Omraade er lidt tilbage herhjemme og gennemgaaende ikke har faaet Øjnene op for, hvor frugtbart et Samarbejde mellem Matematik- og Fysiklæreren i Gymnasieklasserne kan være baade for Fysik- og Matematikundervisningen?

* * *

Kemisk Analyse til Brug for det matematiske Gymnasium af Poul Frederiksen, Adjunkt ved Ordrup Gymnasium, Gyldendal 1919, 15 Sider. (Anmeldt af Adjunkt Chr. Jensen).

Det foreliggende Hefte indeholder en Anvisning paa at gennemføre en kvalitativ Analyse af en forelagt Stofblanding, som kan opløses enten i Vand eller i fortyndet Saltsyre eller i fortyndet Salpetersyre, og som kan indeholde Pb, Ag, Cu, Ba, Fe, Zn, K, Na, NH_4 samt Syrene: Saltsyre, Svovlsyre, Fosforsyre og Salpetersyre. Hvorvidt man er enig med Forf. i den valgte Afgrænsning eller ikke er en Skønssag; men indenfor det valgte Omraade angives der en klar og præcis Plan for Fremgangsmaaden. Forf. skriver i Forordet: »Jeg har gjort den Erfaring, at den kemiske Analyse skærper Elevernes Iagttagelsesevne; den interesserer dem i høj Grad, da Arbejdet er spændende fra først til sidst; . . . den vil blive et fornøjeligt og lærerigt Led af Undervisningen.« Der er ingen Tvivl om, et Forf. har Ret i disse Betragtninger, en anden Ting er: bliver der ikke en Vanskelighed ved at faa Tiden til at slaa til til disse Øvelser?

Digitized by Google

Danske Eksamensopgaver.

Pigeskolens Faglærerindeeksamen.
Oktober 1919.

I.

Der ønskes en Fremstilling af Læren om Logaritmer. Den praktiske Anvendelse af Teorien oplyses ved Taleksempler.

II.

1. Paa en Parabel er givet to Punkter A og B, som er symmetriske med Hensyn til Parables Akse. P og Q er to Punkter paa Parablen saaledes beliggende, at $\angle PAB = \angle BAQ$. Bevis at PQ er parallel med Tangenten i B.

2. En Terning med Kanten a og et regulært Oktaeder med Diagonalen $2a$ har fælles Centrum, og hvert Par modstaaende Sideflader i Terningen er parallel med en Diagonalplan i Oktaedret.

Hvormange og hvilke Sideflader har det Legeme, som er fælles for disse to Polyedre, og hvor mange Hjørner og Kanter har det? Beregn dets Volumen og Toplansvinkler.

3. Konstruer en Trekant af en Side, Forskellen mellem dens hosliggende Vinkler, samt Vinklen mellem den givne Side og dens Median.

Løsninger:

1. Analytisk bevises Opgaven ved en simpel Regning.

2. 6. Kvadrater og 8 ligesidede Trekanter. 12 Hjørnespidser i de fælles Midtpunkter for Terningens og Oktaedrets Kanter. 24 Kanter af Længden $a\sqrt{\frac{1}{2}}$. Volumen $= \frac{5}{6}a^3$. Toplansvinkelen er Supplement til Oktaedrets halve Toplansvinkler, dens Tangens er $-\sqrt{2}$.

3. I $\triangle ABC$ er givet BC, $B - C = u$ $\angle AMB = v$. Trekanten omlægges om BC's Akse til $A_1BC \angle ACA_1 = u$. BC, MA og MA_1 kan afsættes. Man skal da bestemme $AA_1 \perp BC$ saaledes, at $\angle ACA_1 = u$, hvilket kan gøres ved først at tegne en med AA_1C ligedan beliggende Figur med M som Fællespunkt.

III.

1. Find de Værdier af x og y, som tilfredsstiller Ligningerne:

$$x^2 - 2y = y^2 + 2x.$$
$$2x^2 - y^2 - xy - 7x + y + 6 = 0.$$

Digitized by Google

2. En Kurve har i retvinklede Koordinater Ligningen:

$$y = x \cos x - \sin x.$$

Find det af Kurvens Minimumspunkter, som har den mindste positive Abscisse; og beregn Arealet mellem Ordinaten i det fundne Minimumspunkt, X-Aksen og Kurven.

3. Tangenterne i to Cirkelpunkter A og B skærer hinanden i P. M er Midtpunktet af en Korde, hvis Forlængelse gaar genem P.

Bevis: $\angle AMP = \angle PMB$.

Løsninger:

1. $x = 3$, $y = -3$ og $y = x - 2$, x vilkaarlig.
2. Minimumspunktet $x = \pi$, $y = -\pi$. Arealet $= 4$.
2. P, A, B og M ligger alle paa en Cirkel, hvis Diameter er Forbindelseslinien mellem P og Centrum. I denne Cirkel er $\angle AMP$ og $\angle PMB$ Periferivinkler, som spænder over ligestore Korder.

IV.

1. Udgiften til Brændsel til et Hospital beregnes et Aar til ialt 346014 Kr. — Det bestod af: 1) 28000 kg Optændingsbrænde à 6 Øre, 2) 350 t Kul à 153 Kr., 3) 41000 hl Kokes — deraf en Del knuste til 7,20 Kr. pr. hl. og $255\frac{5}{9}$ % flere hele Kokes til 6,70 Kr. pr. hl — 4) Tændstikker og Ildtændere for 400 Kr., samt 5) 40000 m^3 Gas, dels til 12, dels til 36 Øre pr. m^3.

Hvor mange m^3 Gas brugtes til hver Pris?

II. Næste Aars Budget udviste — trods Nedsættelse i Forbruget — en Stigning paa 68116 Kr., da alle Priser var steget. Af Brænde brugtes 26000 kg, men Udgiften blev 20 Kr. mere end det dobbelte af forrige Aars.

a) Hvor mange % er Brændet steget i Pris?

Kulprisen er steget med 2 Kr, pr. t, Forbruget nedsat med $37\frac{1}{7}$ %. Af hele Kokes brugtes samme Mængde, men af knuste 2000 hl færre; den samlede Udgift til Kokes bliver 85050 Kr. større end forrige Aar, da Priserne pr. hl er steget med lige mange Øre for begge Slags.

b) Hvor mange % er Kokespriserne steget? (2 Dec.)

Udgiften til Tændstikker og Ildtændere er steget med 150 %. Gaspriserne er steget til henholdsvis 15 Øre og 40

Digitized by Google

Øre, og der bruges halvt saa meget af den billige som af den dyre Gas.

c) Hvor mange m³ brugtes af hver Slags?

(De to Aars Budget ønskes opført paa en overskuelig Maade; Løsningen maa være saa udførlig, at Fremgangsmaaden træder klart frem, og Anvendelse af Ligninger bør helst undgaas).

Løsninger:

I. 13400 m³ à 12 Øre, 26600 à 36 Øre.

II. a) $116^2/_3$ %. *b*) 38,06 % for hele, 35,42 % for knuste Kokes. c) 12000 m³ à 15 Øre, 24000 m³ à 40 Øre.

Studentereksamen.

September 1919.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Bevis at

$$(ab)^n = a^n b^n$$

for alle rationale Værdier af n.

2. I en Trekant ABC er givet

$$\angle A = 61^0,37, \text{ Siden } AB = 5{,}921 \text{ og Højden } CD = 3{,}456.$$

Beregn Trekantens ubekendte Sider og Vinkler samt den indskrevne Cirkels Radius.

3. Idet M er et vilkaarligt Punkt paa Ellipsen.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

og P og Q er Skæringspunkterne mellem Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2 \qquad (k > 1)$$

og Tangenten til den første Elipse i M, skal man bevise, at M er Midtpunktet af PQ.

Resultater:

2. $a = 5{,}313$, $b = 3{,}983$, $B = 40^0{,}6$, $C = 78^0{,}03$, $r = 1{,}349$.

3. Søger man Abscisserne til Skæringspunkterne mellem Tan-

Digitized by Google

genten i M og den sidste Ellipse, ser man ved Betragtning af de givne Ligninger umiddelbart, at Summen af disse Abscisser bliver det dobbelte af Abscissen til Punktet M.

II.

1. En Pyramides Grundflade er en regulær 6-kant med Siden a, og hver Sidekant er $3a$. Find Radierne i Pyramidens indskrevne og omskrevne Kugle.

2. Bestem Værdien af a i Ligningen

$$3ax^3 - 3x^2 + ax - 14 = 0$$

saaledes, at Summen af Røddernes Kvadrater er lig med Summen af Røddernes Produkter to og to. Indsæt derefter a, og løs Ligningen.

3. Bestem Udseendet af Kurven

$$x^3 = a^2(x - y),$$

og find Arealet af den Figur, der begrænses af X-aksen og Kurven

Resultater:

1. $r = \frac{a}{16}(\sqrt{210} - 3\sqrt{2})$; $R = \frac{9a}{8}\sqrt{2}$.

2. $a = \pm 1$. I første Tilfælde finder man Rødderne

$$2, -\tfrac{1}{2} \pm \frac{i5\sqrt{3}}{6}$$

i andet Tilfælde Rødderne $-2, \frac{1}{2} \pm \frac{i5\sqrt{3}}{6}$.

3. Kurven gaar gennem Begyndelsespunktet, der er Kurvens eneste Vendepunkt og tillige Symmetricentrum. Kurven skærer endvidere Abscisseaksen i Punkterne $(\pm a, 0)$. Det søgte Areal bliver $\frac{a^2}{2}$.

Almindelig Forberedelseseksamen.

Oktober 1919.

Regning.

I.

I England kan man købe 1 cwt. Skriftmetal for 3 £. 3 sh. 6 d., og Omkostningerne ved Fremsendelse til Danmark udgør 5 pCt. af Indkøbsprisen.

Digitized by Google

Hvor stort et Beløb (udtrykt i danske Penge) sparer man pr. 100 kg, naar man selv fremstiller Skriftmetallet ved Sammensmeltning af 40 Vægtdele Bly, 17 Vægtdele Antimon og 3 Vægtdele Tin, idet Priserne paa disse Metaller er henholdsvis 75 Øre, 105 Øre og 530 Øre pr. kg? (Der tages intet Hensyn til Svind ved Sammensmeltningen).

1 £ = 20 sh. = 240 d. = 18,46 Kr., 1 cwt. = 50,8 kg.

II.

I en Bank indsatte en Mand. d. 2. Januar 1909 800 Kr. og derefter d. 2. Januar 1912 saa stort et Beløb, at han d. 2. Januar 1920 vilde kunne hæve 2500 Kr., hvis Banken hele Tiden gav 4 pCt. i aarlig Rente,

Hvor stort er dette Beløb?

Banken nedsatte imidlertid fra d. 2. Januar 1915 den aarlige Rente til $3\frac{1}{2}$ pCt.

Hvor meget faar han udbetalt d. 2. Januar 1920.

Resultater:

1. 14,89 Kr. 2. 927,5 Kr.; 2441 Kr.

Aritmetik.

I

Reducer

$$(1 + 2\sqrt{3x - 2})(2 - \sqrt{3x - 2})(2x - 2 + \sqrt{3x - 2}).$$

II.

Find x og y af Ligningerne

$$\frac{5x + 2y}{21} - \frac{x + y}{7} = b,$$

$$ax + by = 5a^2 - 5b^2.$$

III.

Find x af Ligningen

$$2^{2x+3} + 4^{-x} = 6.$$

Resultater:

1. $(x - 2)(9 - 12x)$.
2. $x = 5a - 2b,\ y = 2a - 5b$.
3. $x = -\frac{1}{2}$ eller $x = -1$.

Digitized by Google

Geometri.

I.

Der er givet en ret Linie samt Punktet A i Afstand a fra Linien. Konstruer en Cirkel, som gaar gennem Punktet A, berører Linien, og hvis Radius er $\frac{1}{3}a\sqrt{5}$.

II.

I en ligesidet Trekant med Siden a er indskrevet en Cirkel. Find Cirkelens Radius.

En Tangent til Cirklen tegnes parallelt med Trekantens ene Side. Find Tangentens Afstand fra denne Side, det Stykke af Tangenten, der afskæres mellem Trekantens to Sider, samt Arealet af det Trapez, som Tangenten afskærer af den givne Trekant.

III.

I et Rektangel $ABCD$ er trukket Diagonalen AC. Fra Vinkelspidserne B og D nedfældes paa Diagonalen de vinkelrette BF og DG. Naar Siderne AB er lig p og BC lig q, skal man bestemme Længderne af de tre Stykker, hvori Diagonalen deles af Punkterne F og G.

Hvor stort maa Forholdet til $q:p$ være, naar Diagonalens tre Stykker er lige store?

Hvor mange cm er hvert af Diagonalens tre Stykker, naar $p = \sqrt{3}$ cm og $q = \sqrt{6}$.

Resultater:

2. $r = \frac{a}{6}\sqrt{3}$, Tangentstykket $= \frac{a}{3}$, Arealet $= \frac{2\sqrt{3}}{9}a^2$.

3. $AF = CG = \frac{p^2}{\sqrt{p^2+q^2}}$, $FG = \frac{q^2-p^2}{\sqrt{q^2+p^2}}$; i det specielle Tilfælde $q:p = \sqrt{2}$.

I Eksemplet $AF = FG = GC = 1$ cm.

Mellemskoleeksamen.

September 1919.

Regning.

1. En Mand køber et rektangulært Grundstykke, der er 72 m langt og 54 m bredt, for 1,25 Kr. pr. m^2. Om Grundstykket sætter han et Stakit, der koster 8,50 Kr. pr. m. Paa

Digitized by Google

Grundstykket lader han bygge et Hus, der koster 58898 Kr. Hvor stor er Mandens samlede Udgift?

Huset udlejes for en aarlig Sum af 5800 Kr., til Skatter og Vedligeholdelse fragaar 1187 Kr. aarlig. Hvor mange pCt. af den samlede Udgift udgør Mandens aarlige Udbytte?

2. En Mand sælger d. 29. Januar 5000 Kr. $4\frac{1}{2}$ pCt's. Obligationer til Kurs 96 (Terminer $^{11}/_{6}$ og $^{11}/_{12}$). Kurtage 1 p. m. Hvor meget faar han udbetalt?

For Salgssummen køber Manden samme Dag 1000 Kr. Aktier til Kurs 312. Kurtage 1 p. m. Hvor mange Penge faar han til Rest?

Løsninger:

1. 65900 Kr. 7 %.
2. 4825,20 Kr. 1702,08 Kr.

Matematik.

1. Konstruer en Firkant $ABCD$ af Siderne $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 5$ cm, $DA = 4$ cm og $\angle A = 120^0$.

Konstruer dernæst den Cirkel, der berører Siderne AB, BC og CD.

2. Find x af Ligningen

$$\frac{0{,}3 \cdot x - \frac{1}{2}}{3} - \frac{x^2 + 15}{15x} = \frac{1}{x} - \frac{x - 4{,}2}{6x}.$$

Løsninger:

2. $x = \pm 9$.

Løste Opgaver.

11. Bevis, at en Trekant er ligesidet, naar dens Vinkler tilfredsstiller Relationen:

$$\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C + (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)^2 = 3(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C).$$

H. Paulli.

Opgavestillerens Løsning:

Af: $\cos 2A \cos 2B = \cos^2 C - \sin^2 (A - B)$ faas ved paa venstre Side at indføre $\sin A$ og $\sin B$:

$$4 \sin^2 A \sin^2 B = 2 \sin^2 A + 2 \sin^2 B - \sin^2 C - \sin^2 (A - B).$$

Digitized by Google

Lægges hertil de to analoge Ligninger faas:

$$\left.\begin{array}{l}4(\sin^2 A\sin^2 B+\sin^2 B\sin^2 C+\sin^2 C\sin^2 A)=3(\sin^2 A\\ +\sin^2 B+\sin^2 C)-(\sin^2(A-B)+\sin^2(B-C)+\sin^2(C-A))\end{array}\right\}(1)$$

Videre faas ved at kvadrere: $\sin^2 A-\sin^2 B=\sin(A-B)\sin C$:

$$\sin^4 A+\sin^4 B-2\sin^2 A\sin^2 B=\sin^2(A-B)\sin^2 C.$$

Lægges hertil de to analoge Ligninger faas:

$$\left.\begin{array}{l}2(\sin^4 A+\sin^4 B+\sin^4 C)-2(\sin^2 A\sin^2 B+\sin^2 B\sin^2 C\\ +\sin^2 C\sin^2 A)=\sin^2(A-B)\sin^2 C+\sin^2(B-C)\sin^2 A\\ +\sin^2(C-A)\sin^2 B\end{array}\right\}(2)$$

Ved Addition af (1) og (2) faas, idet der sættes:

$$\left.\begin{array}{l}2(\sin^2 A\sin^2 B+\sin^2 B\sin^2 C+\sin^2 C\sin^2 A)=(\sin^2 A+\sin^2 B\\ +\sin^2 C)^2-(\sin^4 A+\sin^4 B+\sin^4 C).\\ 3(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)-[\sin^4 A+\sin^4 B+\sin^4 C\\ +(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)^2]=\sin^2(A-B)\cos^2 C\\ +\sin^2(B-C)\cos^2 A+\sin^2(C-A)\cos^2 B.\end{array}\right\}(3)$$

Da højere Side af (3) kun kan blive Nul for $A=B=C$ (det udartede Tilfælde $A=180^0$ $B=C=0$ fraregnet), er Paastanden herved bevist.

(Løsning indsendt af A. M. Bunk og Bisgaard Kristensen).

12. Udled følgende Relation mellem en Trekants Vinkler:

$$\cos 2A\sin^2(B-C)+\cos 2B\sin^2(C-A)+\cos 2C\sin^2(A-B)=$$
$$4\left(\sin^2 A\sin\left(\frac{\pi}{3}+A\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-A\right)+\sin^2 B\sin\left(\frac{\pi}{3}+B\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-B\right)+\right.$$
$$\left.\sin^2 C\sin\left(\frac{\pi}{3}+C\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)\right).$$

H. Paulli.

Opgavestillerens Løsning:

Multipliceres med 2 paa begge Sider af (2) i forrige Opgave og lægges hertil (1) faas:

$$\cos 2A\sin^2(B-C)+\cos 2B\sin^2(C-A)+\cos 2C\sin^2(A-B)$$
$$=3(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)-4(\sin^4 A+\sin^4 B+\sin^4 C).$$

Indsættes paa højre Side:

$$3-4\sin^2 A=4\left(\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin^2 A\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{3}+A\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-A\right)$$

og analoge, faas den søgte Relation.

(Ogsaa løst af Bisgaard Kristensen og Poul Holst).

13. Bevis, at i en spidsvinklet Trekant er Summen af Afstandene fra Vinkelspidserne til Højdernes Skæringspunkt

Digitized by Google

lig med Summen af den omskrevne og den indskrevne Cirkels Diametre.

N. F. Jensen.

Løsning:

Højdernes Skæringspunkt kaldes O. Iøvrigt anvendes sædvanlige Betegnelser.

Man har

$$AO = \frac{b \cos A}{\sin B}, \quad BO = \frac{c \cos B}{\sin C} \quad \text{og} \quad CO = \frac{a \cos C}{\sin A},$$

hvoraf man faar

$$AO + BO + CO = \frac{a}{\sin A}(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$= \frac{a}{\sin A}\left(4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} + 1\right) = \frac{2a \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{a}{\sin A}.$$

Heri er de to Led som bekendt lig med henholdsvis $2r$ og $2R$.

Er $\angle A = 90^0$, har man

$$2R = a \text{ og } r = s - a = \frac{b + c - a}{2},$$

hvoraf umiddelbart

$$b + c = 2R + 2r.$$

Naar $\angle A > 90^0$, faar man

$$OA = -\frac{b \cos A}{\sin B}$$

hvilket medfører, at

$$2R + 2r = OB + OC - OA.$$

P. Kock.

(Ogsaa løst af A. M. Bunk og Bisgaard Kristensen).

14. Find x af Ligningen

$$x + \frac{1}{1 - x} - \frac{1 - x}{x} - a - \frac{1}{1 - a} + \frac{1 - a}{a} = 0.$$

Løsning:

Ligningen bringes paa Formen

$$x - a + \frac{x - a}{(1 + x)(1 - a)} + \frac{x - a}{x \cdot a} + 0,$$

der spalter sig i $x - a = 0$ og en Ligning, der kan skrives som

$$(1 - x) x + \frac{x}{1 - a} + \frac{1 - x}{a} = 0$$

eller

Digitized by Google

$$x^2 - x\left(\frac{a-1}{a} + \frac{1}{1-a}\right) + \frac{1}{a} = 0,$$

Man ser umiddelbart, at denne Ligning har Rødderne

$$x = \frac{a-1}{a} \text{ og } x = \frac{1}{1-a}.$$

Vilhelm Pedersen.

(Løst af Frederik A. Madsen, Erik Ravn, Otto Wilhjelm, Johan Budtz Olsen.)

15. I en spidsvinklet Trekant ABC fældes Højden CD. Bevis at

$$a^2 = b^2 + c(BD - AD).$$

Gælder Slutningen ogsaa, naar $\angle A > 90^0$?

N. Ø. Lund.

I alle Tilfælde haves

$$b^2 = h_c^2 + AD^2$$

$$a^2 = h_c + BD^2,$$

hvoraf

$$a^2 - b^2 = BD^2 - AD^2.$$

Regner man ikke Liniestykkerne med Fortegn, faar man heraf

$$a^2 = b^2 + c(BD \pm AD),$$

eftersom

$$\angle A \gtrless 90^0.$$

F. A. Madsen, Nykøbing Katedralskole.

(Løst af Otto Wilhjelm, Poul Ditlevsen, Axel Lademann, Erik Ravn, Johan Budtz Olsen, Vilhelm Pedersen, P. Kock).

16. Find et Tal, hvis Kubikrod skrives med Tallets sidste to-ciftede Del.

N. Ø. Lund.

Løsning.

Tallets sidste tocifrede Del kaldes a; det Tal, der dannes af de øvrige Cifre, betegnes ved b.
Man har da:

$$100b + a = a^3,$$

der omskrives til

$$b = \frac{(a-1)a(a+1)}{4 \cdot 25}.$$

Er heri a lige, $a - 1$ og $a + 1$ altsaa ulige, saa maa a være deleligt med 4, og $a - 1$ eller $a + 1$ med 25. a kan da kun have Værdierne (0), 24 og 76.

Digitized by Google

Er a ulige, $a - 1$ og $a + 1$ altsaa lige, opstaar der følgende Muligheder for at b kan blive et positivt, helt Tal (eller o):

$$a = 1,\ a = 25,\ a = 75,\ a - 1 = 50,\ a + 1 = 50,\ a + 1 = 100.$$

Der eksisterer saaledes 7 Kubiktal, der har den forlangte Egenskab, nemlig

$$13824 = 24^3 \quad 117649 = 49^3 \quad 421875 = 75^3$$
$$15625 = 25^3 \quad 132651 = 51^3 \quad 438976 = 76^3$$
$$970299 = 99^3$$

foruden

$$00 = 00^3 \text{ og } 01 = 01^3.$$

P. Kock.

(Løsninger indsendt af Edvard Zeuthen, Valdemar Simonsen).

17. Man har givet et Rektangel med Siderne $2a$ og $2b$, hvor $a > b$. Find det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra de to mindste Sider ses under Vinkler, der enten er lige store eller Supplementsvinkler.

A. M. Bunk.

Løsning.

Diagonalernes Skæringspunkt vælges til Begyndelsespunkt, og Koordinatakserne lægges parallele med Rektanglets Sider (Abscisseaksen $\mp 2a$).

Saalænge de to mindste Sider ses fra et Punkt, der ligger imellem Parallerne $x = + a$ og $x = - a$, udtrykker Ligningerne

$$\pm \frac{\frac{y-b}{x-a} - \frac{y+b}{x-a}}{2 + \frac{y^2-b^2}{(x-a)^2}} = \frac{\frac{y+b}{x+a} - \frac{y-b}{x+a}}{1 + \frac{y^2-b^2}{(x+a)^2}} \tag{1}$$

henholdsvis, at Siderne ses under to lige store Vinkler og under to Vinkler, der er Supplementvinkler.

Rykker Vinklernes Toppunkt udenfor Parallelerne $x = \pm a$, skifter den ene Vinkel positiv Omlobsretning, og Fortegnene for venstre Side i (1) gælder omvendt.

Ligningerne (1) reduceres til henholdsvis

$$x(a^2 + b^2 - x^2 - y^2) = 0 \tag{2}$$

og

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2, \tag{3}$$

af hvilke (2) deler sig i

$$x = 0 \tag{4}$$

og

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2. \tag{5}$$

Mellem Parallelerne $x = \pm a$ er Stedet for Toppunkterne

Digitized by Google

af Vinkler, der er lige store, altsaa Ordinataksen (4) og Rektanglets omskrevne Cirkel (5), medens den ligesidede Hyperbel (3) gennem Rektanglets Vinkelspidser er Stedet for Toppunkterne af Vinkelpar, der to og to er Supplementvinkler.

Udenfor de samme Paralleler er Hyperblen (3) Stedet for Toppunkterne af Vinkler der er lige store, medens Cirklen (5) er Stedet tor Toppunkterne af to Supplementvinkler.

P. Kock.

(Løsning indsendt af Otto Wilhjelm).

18. For hvilke hele positive Værdier af a, b og c har man

$$8(a^2+b^2+c^2)-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)-16(ab+bc+ca)?$$

A. M. Bunk.

Løsning.

Ligningen kan omskrives til

$$8(a+b+c)^2=(a+b+c)^3,$$

der er tilfredsstillet naar

$$a+b+c=0 \tag{1}$$

og

$$a+b+c=8. \tag{2}$$

(1) giver ingen Løsninger, naar a, b og c er positive.

Af (2) fremgaar, at enhver af Størrelserne a, b og c kan faa enhver af Værdierne 1, 2, 3, 4, 5 og 6. Af disse Tal kan Summen

$$a+b+c=8$$

dannes paa 21 forskellige Maader. Dette indses saaledes:

Naar $a=1$ kan Summen $b+c=7$ fremstilles af Tallene 1 til 6 paa 6 forskellige Maader. Er $a=2$, kan Summen $b+c=6$ kun fremstilles af Tallene 1 til 5; altsaa paa 5 forskellige Maader, o. s. v. Det samlede Antal bliver derfor

$$6+5+4+3+2+1=21.$$

P. Kock.

(Ogsaa løst af Edvard Zeuthen, F. A. Madsen og Poul Holst).

Opgaver til Løsning.

40. Idet A og B er givne Vinkler og

$$\operatorname{tg} x=\frac{2\sin A-\operatorname{tg} B}{1+2\cos 2A},\quad \operatorname{tg} y=\frac{2\sin B-\operatorname{tg} A}{1+2\cos 2B},$$

skal man finde $x+y$; spec. $A=B$.

H. Paulli.

Digitized by Google

41. Løs og diskuter Ligningerne

$$\cos x + \cos y = a,$$
$$\cos 3x + \cos 3y = b.$$

42. Gennem et Punkt P paa Diameteren AB i en Cirkel trækker man en vilkaarlig Korde MN. I P oprejses vinkelret paa AB en Linie, der skærer Tangenterne i M og N henholdsvis i E og F. Bevis, at $PE = PF$.

43. Bevis, at Udtrykket

$$\frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{2\sin^6 x}{6} + \frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\sin^4 x}{4}$$

er uafhængigt af x.

44. Find største fælles Maal for Tallene.

$$2^{2623} - 1 \quad \text{og} \quad 2^{1161} - 1.$$

(41—44 efter Journal de mathématiques élementaires).

45. En Prismatoides ene Endeflade er en vandret, regulær Sekskant $ABCDEF$ med Siden a, den anden Endeflade en ligesidet Trekant LMN, hvis Vinkelspidser ligger lodret over henholdsvis Punkterne A, C og E. Endefladernes Afstand er b. Bestem Prismatoidens Volumen og Toplansvinkler. Prismatoiden skæres af en Plan parallel med Endefladerne. Bestem Arealet af Snitfladen, naar dens Afstand fra den nederste Endeflade er c.

46. I et sædvanlig retvinklet Koordinatsystem betragter man et variabelt Keglesnit, der gaar gennem Punkterne $(0, a)$, $(-a, 0)$ og $(0, -a)$ og rører Linien $x = a$. Man trækker Tangenterne til Keglesnittet i Punkterne $(0, a)$ og $(0, -a)$. Find det geometriske Sted for disse Tangenters Skæringspunkt.

47. En ret cirkulær Kegle, hvis halve Toppunktsvinkel er v, omskrives med et Tetraeder $OABC$, saaledes, at Keglens Grundflade indskrives i Trekant ABC med Siderne a, b og c.

Digitized by Google

Find Siderne i det tresidede Hjørne, der har O til Toppunkt. Hvor stor maa v være, hvis en af Hjørnets Sider skal være 90^0?

(45—47 af G. M. Stensig.)

48. I en Sekskant, der er indskrevet i en Cirkel, gaar de to Diagonaler mellem de modstaaende Vinkelspidser gennem de modstaaende Siders Skæringspunkter. De paa hinanden følgende Vinkelspidser betegnes med 1, 2, 3, 4, 5, 6 og Vinklerne i Sekskanten med det Tal, sat i Parentes, der betegner Vinkelspidsen.

1. Bevis, at:

$$(12)\sin(4)\sin(5):(45)\sin(1)\sin(2):(36)\sin(3)\sin(6) =$$
$$(34)\sin(6)\sin(1):(61)\sin(3)\sin(4):(25)\sin(2)\sin(5) =$$
$$(56)\sin(2)\sin(3):(23)\sin(5)\sin(6):(14)\sin(1)\sin(4) =$$
$$\left[(12)(34)(56)\right]^{\frac{1}{3}}:\left[(23)(45)(61)\right]^{\frac{1}{3}}:\left[(14)(25)(36)\right]^{\frac{1}{3}}.$$

2. Konstruer Sekskanten, naar Vinkelspidserne 1, 2, 3 og 4 er givne saaledes, at $(23) \nparallel (14)$ og $\angle(412) = 60^0$.

(H. Paulli).

49. Visa att om m är ett helt tal, så är

$$(3+\sqrt{5})^m = A_m + B_m\sqrt{5},$$

där A_m och B_m äro hela tal, av vilka A_m är det hela tal, som ligger närmast över $B_m\sqrt{5}$. Visa även, att det hela tal, som ligger närmast över $(3+\sqrt{5})^m$ är divisibelt med 2^m.

(Tidsskrift för elementär M., F. o. K.)

50. Eliminer y mellem Ligningerne

$$x^m + x^{m-1}y + x^{m-2}y^2 + \cdots + y^m = a^m,$$

$$x^{2m} + x^{2m-2}y^2 + x^{2m-4}y^4 + \cdots + y^{2m} = b^{2m}.$$

Opgaver til Undervisningsbrug.

53. I en Differensrække er $a_p = \frac{q}{q-1}$, $a_q = \frac{p}{p-1}$, hvor p og q er positive hele Tal ($p > q > 1$). Find Rækkens første Led og bestem n saaledes, at Summen af n Led bliver $2n$.

Digitized by Google

54. To Cirkler C_1 (Radius r, Centrum O_1) og C_2 (Radius $2r$, Centrum O_2) rører hinanden udvendig. Hvorledes bestemmer man paa C_2 et Punkt A saaledes, at Tangenten fra A til C_1 bliver $3r$? Find Værdien af det Forhold, hvori Skæringspunktet mellem C_2 og AO_1 deler dette sidste Liniestykke.

(53—54 af G. M. Stensig.)

55. Løs Ligningerne

$$y^2 = px,$$
$$y^2 + (x - a)^2 = R^2.$$

56. Find de reelle Værdier af x og y, der tilfredsstiller Ligningen

$$3x + iy = \frac{4 + ix}{2 - iy}.$$

57. Find x, y og z af Ligningerne

$$xyz = \frac{x + y}{2a} = \frac{y + z}{2b} = \frac{z + x}{2c}.$$

58. Find x, y og z af Ligningerne

$$xyz = \frac{xy + yz}{a} = \frac{yz + xz}{b} = \frac{xz + xy}{c}.$$

(56—58 af O. A. Smith)

59. Tre Whistspillere A, B og C spiller tre Rubberter Whist. A og B vinder den første Rubbert, A og C den anden og B og C den tredje. Gevinsterne er saaledes fordelte, at den Vindende stadig fordobler den Sum, han har, naar Rubberten begynder. Efter Spillet har enhver 8 Kr. tilbage. Hvor mange Kroner havde enhver af Spillerne, da de begyndte Spillet? (Gammel Opgave.)

60. Find x af Ligningerne

$$x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10 = 0,$$
$$x^4 - 11x^3 - 12x^2 + 66x + 36 = 0,$$
$$x^4 - 11x^3 - 12x^2 + 66x + 36 = 0,$$
$$2x^3 - x^2 = 1,$$
$$x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 24x + 5 = 0.$$

Digitized by Google

61. Løs Ligningen

$$\operatorname{tg} x + \cot x = \operatorname{tg} 3x + \cot 3x + 4.$$

62. Vis, at for alle positive Værdier af a, b og c er

$$(a + b + c)^3 \geqq 27abc.$$

63. Paa hvor mange Maader kan en Krone veksles i nu gældende dansk Kobbermønt? I hvor mange af disse Tilfælde faas mindst een Mønt af hver Slags?

64. Findes der nogen Punkter paa Hyperblen $y^2 = x^2 + x + 1$, hvis Koordinater begge er hele Tal?

(61—64 efter Tidsskrift för elementär Matematik, F. o. K.)

65. I en ret cirkulær Kegle er Højden 15 cm og Radius i Grundfladen 36 cm, bestem den indskrevne Kugles Radius.

66. Om en Kugle er omskreven en ret cirkulær Kegle, hvis Rumfang er dobbelt saa stor som Kuglens. Find Forholdet mellem Keglens Højde og Kuglens Diameter.

67. I hvilken Afstand fra Toppunktet i en ret cirkulær Kegle skal man lægge en Plan parallel med Grundfladen, for at det øverste Stykke kan forholde sig til det nederste som $m : n$? Eks. $m = n$; $m : n = 27 : 37$.

68. Hvor stor er Topvinklen i en ret cirkulær Kegle, naar Keglens krumme Overflade er dobbelt saa stor som Grundfladen.

69. Hvor stor er Topvinklen i en ret cirkulær Kegle, naar Grundfladen er n Gange saa stor som den indskrevne Kugles Overflade. Eks.: $n = 1$, $n = 0{,}75$.

70. To Kugleflader med samme Radius gaar gennem hinandens Centrer; bestem Rumfanget af det konvekse linseformede Legeme, som de to Kugler har fælles.

71. En Kugle med Radius r skal ved et plant Snit deles i to Dele saaledes, at de to Kuglekallotters Arealer forholder sig som $m : n$. I hvilken Afstand fra Centrum skal Snittet lægges? Eks.: $m : n = 0{,}5$.

Digitized by Google

72. Af en Kugle, hvis Overflade er 4 m^2, afskæres et Segment, hvis krumme Overflade er 1 m^2. Hvorledes forholder Kuglens og Segmentets Kubikindhold sig til hinanden?

73. Bestem den mindste Faktor, som gør 34236, 56144 og 71550 til Kvadrattal.

74. Vis, at naar n er et ulige Tal, gaar 4 op enten i $n^p + 1$ eller i $n^p - 1$.

75. Vis, at Udtrykket

$$n(n^2 - 1)(n^2 - 5n + 26)$$

hvor n er et helt Tal større end 1, altid er deleligt med 120.

Til Tidsskriftets Læsere og Medarbejdere.

Idet vi udsender dette sidste Hefte af *Matematisk Tidsskrift A's* første Aargang, føler vi en Trang til at sige vore Læsere og Medarbejdere Tak for al god Støtte i det forløbne Aar.

Et matematisk Tidsskrift vil i et saa lille Land som vort altid have Vanskelighed ved at bestaa, fordi den Kreds, det kan henvende sig til, er saa begrænset; det gælder derfor om at faa alle Matematiklærere og andre Matematikinteresserede knyttet til det. Dette Maal er langt fra naaet endnu. Men vi kan dog konstatere en sikker og stadig stigende Interesse for Tidsskriftet, dels derigennem, at Abonnentantallet er vokset Aaret igennem, dels derved, at vi har faaet rigeligt Stof til det.

Der vil i den kommende Aargang blive paabegyndt en ny Opgaveafdeling, *Opgaver for Gymnasieelever,* der særlig henvender sig til Eleverne i Gymnasiet, til Seminarister og yngre Matematikstuderende, og der vil under denne Opgaveafdeling blive stillet Prisopgaver med Præmier for de bedste Løsninger. Foruden disse Prisopgaver vil 1. Hefte bringe de sædvanlig større Prisopgaver for Aaret; de vil iaar blive stillet af Professor H. Bohr.

Digitized by Google

Redaktionen af de forskellige Opgaveafdelinger vil blive overtaget af cand. mag. G. M. Stensig.

Da Tidsskriftet i det forløbne Aar paa Grund af de stadig stigende Priser paa Papir og Trykning har arbejdet med et endog betydeligt Underskud, vil det blive nødvendigt at forhøje Abonnementsprisen til 8 Kr. aarlig, dog saaledes, at Elever i Gymnasiet, paa Seminarier og lignende Undervisningsanstalter kan faa det for 6 Kr. aarlig, naar de tegner Abonnement gennem deres Lærer direkte hos Jul Gjellerups Forlag.

Vi venter ikke, at denne nødvendige Prisforhøjelse vil bevirke noget Frafald blandt vore Holdere, men haaber tværtimod paa, at de vil arbejde for at skaffe Tidsskriftet større Udbredelse, saa at dets Eksistens yderligere sikres.

December 1919.

J. L. W. Jessen. *O. A. Smith.*

H. G. ZEUTHEN.

Født d. 15. Februar 1839. — Død d. 6. Januar 1920.

I det Øjeblik, da dette Hefte af »Matematisk Tidsskrift« skal gaa i Trykken, modtager Redaktionen Budskabet om *Professor Zeuthens* Død. Efter at *Zeuthen* d. 5. Januar havde gaaet sin daglige Tur, ramtes han af et Hjerteslag og døde fredeligt den næste Morgen.

Endnu i det samtidig udkommende *B*-Hefte bringer vi et Brev fra *Zeuthens* Haand, hvori han med Liv og Lune træder i Skranken for sine Matematik-historiske Synspunkter. Og de, der i Slutningen af September var til Stede ved *Dr. Kobbernagels* Disputats, vil huske den Varme og Iver, hvormed *Zeuthen* hævdede sine antalgeometriske Metoder. Det var en gammel Mand, vi saa for os; men naar han talte lyste hans Aand og hans Blik uforandret til det sidste.

Med Vemod mindes danske Matematikere *Zeuthens* ædle Skikkelse.

Rettelse til 3. Hefte.

S. 103, L. 16 f. o.

$S_{n,p} = 2S_{np-1)} + 2p - 1$ rettes til $S_n = 2S_{n-(p-1)} + 2p - 1$.

Digitized by Google

MATEMATISK TIDSSKRIFT

A

UDGIVET AF

MATEMATISK FORENING I KØBENHAVN

REDIGERET AF

I. L. W. JESSEN O. A. SMITH

AARGANG 1920

Studenterforeningens Bibliotek

Udgået af Studenterforeningens Bibliotek

KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: JUL. GJELLERUPS FORLAG

TRYKT HOS J. JØRGENSEN & Co. (IVAR JANTZEN)

1920

Digitized by Google

Studenterforeningens
Bibliotek

INDHOLD.

AFHANDLINGER, SMAA-ARTIKLER O. LIGN.

Side

Bertelsen, B. P. cand. mag.: Decimalbrøker med lige Periodetal 57
van Deurs, Carl cand. polyt., Ingeniør: Relationen mellem Antallet af Bjerge, Dale, Pas og Søer 104
Fabricius-Bjerre, F. Gymnasieelev: Besvarelse af Prisopgave 131
Fog, David cand. mag.: En Række elementære Sætninger om Cirkler 10
— Besvarelse af Prisopgave I 1919 61
Holm, Erik Lektor: Besvarelse af Prisopgave I 27
Iversen, H. Lektor: Hans Christian Ørsted. 108
Juel, C. Dr. phil., Professor: Hieronymus Georg Zeuthen . . 2
Larsen, O. A. Lektor: Prisopgave I 1919 106
Paulli, H. cand. polyt., Ingeniør: En Bemærkning til: Om Fordelingen af 9 Punkter o. s. v. 25
Petersen Langmack, P. V. F. Beregner: En Korrelationsformel 89

Prisopgaver for 1920 55
Mere om et indsendt Spørgsmaal 54
Til Tidsskriftets Abonnenter 138

LITTERATURANMELDELSER.

Christensen, S. A.: Archimedes' Sandregning (O. A. S.) . . 31
Steensig, A.: Om Undervisning i Naturlære (Chr. Jensen) . 108
Sundorph, Th.: Varmelære for Gymnasiet (Chr. Jensen) . . 108
Tidskrift för elementär Matematik, Fysik och Kemi (Chr. Jensen) 32
Wiskundig Tijdschrift (L. Willesen) 33

OPGAVER.

Opgaver til Løsning: 51—58 46
59—68 84
69—75 128
Opgaver for Gymnasieelever: 1—16 51
17—32 86
33—43 129
Opgaver til Undervisningsbrug: 76—89 49
90—99 139
Løste Opgaver: 19—39 37
40—50 76
51—58 125

Digitized by Google

DANSKE EKSAMENSOPGAVER.

Side

Adgangseksamen til polyt. Læreanstalt.

Sommeren 1920 111

Studentereksamen.

Maj—Juli 1920 113

Alm. Forberedelseseksamen.

Januar 1920 34
Marts—April 1920 71
Maj—Juli 1920 115

Realeksamen.

Januar 1920 36
Marts 1920 73
Juni 1920 116

Mellemskoleeksamen.

Januar 36
Marts 1920 73
Juni 1920 117

Pigeskolens Faglærerindeeksamen.

April 1920 69

Lærer- og Lærerindeeksamen.

1920 74

Skovbrugs- og Landinspektoreksamen.

Februar—Marts 1920 . . . 67

NORSKE EKSAMENSOPGAVER.

1920 118

Digitized by Google

H. G. ZEUTHEN 1880.

Digitized by Google

HIERONYMUS GEORG ZEUTHEN.

15. Febr. 1839. — 6. Jan. 1920.

Naar jeg i Matematisk Tidsskrift skal skrive om den danske Mathematiks afdøde Nestor Prof. Zeuthen, er det naturligt, at jeg holder mig til hans mathematiske Arbejder, selv om hans Liv frembyder mange Sider. Saaledes har han spillet en stor Rolle baade ved Videnskabernes Selskab og ved Universitetet. Om denne sidste Virksomhed skal jeg kun sige, at hans Elever — og alle danske Mathematikere til de sidste Aargange er hans Elever — beundrede hans omhyggeligt udarbejdede Forelæsninger og var taknemlige for den Velvilje og varme Interesse, han med sin humane Karakter viste alle de Studerende.

Her skal jeg alene holde mig til Prof. Zeuthen som Mathematiker, til den videnskabelige Virksomhed, om hvilken det uden Overdrivelse kan siges, at den har kastet Glans ikke alene over vort Universitet, men over vort Land.

Det er næsten unødvendigt at bemærke, at hvad jeg her kan sige, kun kan blive højst ufuldstændig ligeoverfor en Forfatter, der har skrevet henimod et Par Hundrede større og mindre Arbejder.

Zeuthen blev født 1839 i et Præstehjem i Vestjylland, et Hjem med megen videnskabelig og litterær Interesse, og det har givet ham et Præg, som han bevarede hele sin Levetid. Da Faderen blev forflyttet til Sorø, gik han Sorø Skole igennem. Her var han et Par Aar samtidig med sin senere Universitetskollega Prof. Julius Petersen, og det har muligvis havt sin Indflydelse. Sikkert er det, at han, da han i 1857 blev Student, straks bestemte sig til at studere Mathematik. Han hørte til de første Medarbejdere ved det 1858 af Direktør Tüchsen og Prof. Schellerup stiftede »Mathematisk Tidsskrift«. Hans første Arbeider heri var ikke geometriske, men analytiske. Jeg nævner dette for at faa Lejlighed til at bemærke, at Zeuthen paa ingen Maade var speciel i sin videnskabelige Produktion. Tværtimod, der er ingen dansk Mathematiker og slet ikke saa mange nulevende Mathematikere, der har skrevet om saa mange forskellige Emner som Zeuthen.

Digitized by Google

Jeg nævner dette én Gang for alle, da jeg i det følgende nødes til udelukkende at holde mig til Arbejder, hvor han yder noget afgørende. Og det varede ikke længe inden han fandt sit rette Feldt. Efter at have taget Magisterkonferensen i 1862 drog han 1863 til Paris for at fortsætte sine Studier særlig under Chasles. Chasles er utvivlsomt Grundlæggeren af Antalgeometrien, særlig af Karakteristiktheorien, og netop i den Retning blev Zeuthen den store Mester. Den Sikkerhed, hvormed han opererede med herhen hørende, ofte meget vanskelige Opgaver, var uforlignelig, og er næppe naaet af nogen anden.

Hans første Arbejde i den Retning var hans Doktorafhandling fra 1865: »Nyt Bidrag til Læren om Systemer af Keglesnit, der er underkastede fire Betingelser«, et Arbejde, der straks vandt almindelig Anerkendelse og blev oversat i »Nouvelles Annales« allerede 1866. Zeuthen gik dernæst over til Fladerne og bestemte Karakteristikerne i de elementære Systemer af Flader af anden Orden. Det er karakteristisk baade for Zeuthens Karakter og for hans Respekt for Chasles, at han, da han erfarede, at denne gav sig af med samme Arbejde, ikke skyndte sig med at offentliggøre sine Resultater, men indleverede dem i en lukket Konvolut til Videnskabernes Selskab med Anmodning om først at aabne den efter Offentliggørelsen af Chasles' Afhandling.

Undersøgelser af den Art fortsatte han nu og de kulminerede i den store og omfattende »Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver med Anvendelse til Bestemmelse af Karakteristikerne i de elementære Systemer af fjerde Orden« i Videnskabernes Selskabs Skrifter. Det er et af Zeuthens Hovedværker og bærer Vidnesbyrd om Forf.'s uhyre Energi og Arbejdsevne. Det er nemlig en overordentlig kompliceret Opgave, der behandles; allerede Talregningerne maa have krævet megen Tid. Saaledes findes som Antal af de Kurver af fjerde Orden, der berører 13 givne rette Linier og gaar gennem et givet Punkt:

$$2301119144.$$

Og dog vilde man tage helt fejl af Zeuthens Opfattelse, hvis man troede, at han saa et Hovedformaal for Methoderne i at danne saadanne formidable Antal, tvertimod — ogsaa det kunde han gøre, naar det krævedes, — han hævdede

Digitized by Google

iøvrigt netop stærkt, at Hovedformaalet laa i Dannelse af saadanne helt simple Tal, som kunde lede til overskuelige geometriske Sætninger.

Zeuthens Methoder i disse Arbejder er væsentlig to: for det første en rigt moduleret Anvendelse af Chasles' Korrespondanceprincip, for det andet en omhyggelig Undersøgelse af de Ændringer i Udseende og Antal og Beskaffenhed af Kurvens singulære Punkter, der sker ved Overskridelse af udartede Kurver i de Systemer, han betragter. Det sidstnævnte er særlig karakteristisk for Zeuthen.

Jeg maa nu nævne nogle Arbejder fra samme Periode, hvor Metoden vel i det væsentlige var den samme, men som dog havde en nogen anden Karakter, de hører til hans allerbetydeligste Præstationer.

Den ene Gruppe af disse Arbejder handler om Slægtssætningen, d. v. s. om det Tal, som udtrykt ved Kurvens egne Tal, bliver uforandret ved at gaa over fra en Kurve til en anden, der svarer Punkt for Punkt til den første. Zeuthens Bevis for den — tidligere bekendte — Slægtssætning er ganske simpel. Svarer paa de to Kurver γ og γ_1 et Punkt M paa γ til et Punkt M_1 paa γ_1, forbinder man M med et fast Punkt A, og M_1 med et andet fast Punkt B. Skæringspunktet mellem Linierne AM og BM_1 har da til geometrisk Sted en vis Kurve, og man faar den søgte Relation ved at udtrykke, at der fra A og fra B gaar lige mange Tangenter til denne Kurve. Methoden er karakteristisk for Zeuthen og jeg nævner den, da den samme med passende Ændringer er brugt i en Række andre Problemer. Et Bevis af en noget lignende Karakter var givet omtrent samtidig af en italiensk Mathematiker Ruffini, men Zeuthen benyttede straks sin Methode til at udvide Sætningen ogsaa til det Tilfælde, hvor der ikke er éntydig, men flertydig Sammenhæng mellem Kurverne og udledte, hvad man kalder Zeuthens udvidede Slægtssætning. Ganske vist har man senere bemærket, at man kan faa samme Sætning ved at anvende den gamle Abel-Riemann-Clebsch'ske Slægtssætning paa en flerdobbelt tænkt Kurve, men Navnet er dog berettiget, thi dels er Zeuthen den første, der har opstillet denne overordentlig vigtige Sætning, dels har han givet en Mængde Anvendelser af den. Særlig har han benyttet Sætningen til i visse Tilfælde at bestemme Løsningers Multiplicitet, en Bestemmelse han i tidligere Arbejder foretog paa

Digitized by Google

Studenterforeningens Bibliotek

andre Maader. Vi har her et Eksempel paa Zeuthens Energi — aldrig bliver han træt af at forbedre sine Methoder, lige saa lidt som han betænker sig paa at opgive en Methode, naar han kan finde en anden, der synes ham bedre.

Ligeledes har han ad lignende Veje, som den nævnte, undersøgt og bestemt Dobbeltpunkterne ved flertydige Afhængigheder i Planen og Rummet, og som den første funden en Invariant, der optræder ved den entydige Transformation af en algebraisk Flade i en anden. Værdien af denne sidste Undersøgelse blev knap nok straks forstaaet. Det kom først, da italienske Mathematikere henimod det forrige Aarhundredes Slutning uafhængig af Zeuthen og ad helt andre Veje var kommen til samme Resultat. Jeg erindrer, det var Zeuthen en stor Tilfredsstillelse, da han langt senere gjorde sin sidste store Udenlandsrejse, at de italienske Mathematikere med stor Beredvillighed anerkendte hans Prioritet paa dette Punkt. Invarianten hedder i Reglen nu den Zeuthen-Sigre'ske Invariant.

Der er endnu et Par Arbejder, jeg maa omtale. De er i og for sig af stor Værdi — for mig har de havt en særlig Betydning. Den ene handler om Formen af algebraiske Kurver af fjerde Orden, den anden om rette Linier paa algebraiske Flader af tredie Orden. Det er ved Studiet af disse Afhandlinger, at det i sin Tid lykkedes mig at udvide en Del af de deri indeholdte Sætninger til ogsaa at gælde om ikke-algebraiske Kurver og Flader. Det er mig umuligt at skrive om Zeuthens Arbejder, uden at bringe disse to Afhandlinger min Hyldest.

Ved Tiden henimod 1880 sker dog en Stansning i Prof. Zeuthens systematiske Undersøgelser. Hans Interesser var begyndt at dreje sig henimod Historien. Zeuthens Interesse for historiske Undersøgelser gik langt tilbage. Fra en mundtlig Bemærkning ved jeg, at det var Prof. Oppermann, der allerede, da Zeuthen var Student, henledede hans Opmærksomhed paa de Opgaver, der her laa for. Hans første historiske Arbejde var en lille Artikel i Mathematisk Tidsskrift fra 1876 om Brahmeguptas Trapezer. Men han skulde snart finde et rigere Arbejdsfeldt, og man kan næsten datere Tidspunktet derfor. Det var nemlig ved Prof. Hejbergs Doktorafhandling: »Quaestiones Archimedeae«. Det, som i denne Afhandling mest vakte Matematikernes Opmærksomhed, var det, at Doktoranden

Digitized by Google

kritisk fremhævede Spørgsmaal om Archimedes' Kvadratrodsudregninger. I Handlingen deltog fra Mathematikernes Side foruden Zeuthen ogsaa Professorerne Steen og Oppermann. Om Zeuthens Hypothese var helt fyldestgørende, er her mindre væsentlig, den var i hvert Fald interessant. Det, som man i det korte Referat derom, han skrev i Tidsskrift f. Mathematik, mest lægger Mærke til, er at Zeuthen her straks viser sig klar over Forbindelsen mellem de forskellige Perioder i den græske Mathematik. Han erkender, at de af Euclid i geometrisk Form opstillede Sætninger ogsaa efter Euclids egen Opfattelse havde en arithmetisk Anvendelighed — noget han senere uddybede ved sin Opstilling af en græsk Arithmetik og en græsk Algebra i geometrisk Form. Ligeledes gør han opmærksom paa Forbindelsen mellem Euclid og Diofant, hvorved man ikke maa glemme, at mange endnu paa den Tid stod saa uforstaaende overfor den græske Mathematik, at der kunde fables om en indisk Indflydelse paa Diofant.

Allerede i 1885 fremkom saa den store »Keglesnitslæren i Oldtiden«, der fastslog Zeuthens Ry som mathematisk Historiker. Den græske Forf., som her frem for andre kommer paa Tale, er Apollonius. Denne begyndte med at definere Keglesnit som Snit i cirkulære Kegler — men fortsætter dernæst ad ren plangeometrisk Vej. Zeuthen godtgør fuldstændig, at denne Vej i alt væsentlig er den samme, som den, der bruges i den nuværende analytiske Geometri med Parallelkoordinater, og paaviser med stor Sandsynlighed, at Apollonius ogsaa (paa Navnene nær) har kendt ikke ringe Dele af Projektivgeometrien. Noget lignende var ogsaa Chasles kommen ind paa, men knyttede sine Betragtninger til den senere Pappus. Hvorfor Apollonius begynder sin Bog med Keglen, stod indtil videre hen i det uvisse, da han egentlig ligesaa godt kunde have begyndt med Kurvernes Ligninger, direkte knyttet til Fladeanlæg — men ogsaa dette skulde Zeuthen senere forklare. Den indgaaende Behandling af Archimedes er i og for sig ogsaa interessant, men er særlig værd at notere som det første Skridt, de Undersøgelser over Infinitesimalregningens Forhistorie, som han senere saa ofte med Forkærlighed vender tilbage til.

Af den følgende Række historiske Arbejder, er der et, som jeg maa standse ved. Det fremkom ved det skandinaviske Naturforskermøde i København 1892. Det indeholder i al sin

Digitized by Google

Simpelhed en Opfattelse, som jeg ikke betænker mig paa at sige er af afgørende Betydning for Forstaaelsen af adskillige Punkter i Oldtidens Mathematik. Zeuthen siger her simpelthen, at i Oldtiden var Konstruktionen Eksistensbevis. Naar Euclid i sin 1ste Bogs 1ste Sætning lærer at konstruere en ligesidet Trekant, er det ikke for at gøre opmærkom paa, at en saadan kan man konstruere, naar man har Lineal og Passer ved Haanden, men for at sikre sig at en saadan Trekant efter hans Forudsætninger eksisterer. Man faar blandt andre Ting ogsaa ved den nye Opfattelse at vide, hvorfor Apollonius begyndte sin Keglesnitslære med at opfatte Kurverne som Snit i cirkulære Kegler. Nu ser man, at det var for at sikre sig Kurvernes Eksistens som saadanne, idet Cirklens Eksistens for Euclid er aksiomatisk givet. Man ser, at Zeuthen stadig vender tilbage til sine Opgaver for at komme dybere ind paa dem.

Der er særlig et Punkt, hvor Betydningen af Zeuthens Opfattelse er væsentlig, det er ved Forstaaelsen af Parallelaxiomet. Dette kaldtes i tidligere Tid for det XI Axiom, men blev senere hen af textkritiske Grunde stillet paa sin rette Plads som det 5te Postulat. Men først Zeuthens Bemærkning gav den rent mathematiske Forklaring heraf. Parallelaxiomet er et Eksistenspostulat ligesom de øvrige Postulater.

Ved Tiden henimod Slutningen af det forrige Aarhundrede begynder den tredie, den sidste og heldigvis lange Periode af Prof. Zeuthens Liv, og den er paa ingen Maade den mindst interessante. Nu følger en uafbrudt Række af systematiske og af historiske Arbejder skiftevis efter hinanden. Jeg maa ved Omtalen heraf indskrænke mig til dels at nævne nogle enkelte af Arbejderne dels at gøre opmærksom paa, hvorvidt der er fremkommen nye Synspunkter. Nye Enkeltheder kan der ikke være Tale om at tage Hensyn til.

Jeg vil straks bemærke, at der i dette Tidsrum sker en paafaldende Udvikling i formel Henseende. Zeuthens Stil har altid været ulastelig, nu bliver den mere og mere letflydende; flere af de senere Arbejder er det en æstetisk Nydelse at læse. Saaledes synes jeg, at den korte Oversigt over den ældre Tids Mathematik, som Zeuthen — ganske vist paa Tysk — skrev i »Kultur der Gegenwart« er en Perle af en populær historisk Fremstilling. Men i ren videnskabelig Henseende er det nævnte Arbejde naturligvis kun en Affødning af hans store ogsaa udmærket skrevne: Mathematikens Historie fra Oldtiden

Digitized by Google

til Begyndelsen af det attende Aarhundrede. I det andet Bind fra 1903 maa jeg særlig beundre Fremstillingen af Descartes; dennes Mangesidighed har aabenbart tiltalt Zeuthen. Men Hovedsagen i dette andet Bind er den udførlige Behandling af Infinitesimalregningens Forhistorie. Her fremkommer ved Fermat en lille Episode, som synes mig at have Interesse. Blandt andre Forarbejder til det nævnte Værk havde han skrevet flere Monografier over Fermat i Videnskabernes Selskabs daværende Oversigter. Et af Spørgsmaalene er her, hvorledes Fermat kunde have fundet Tyngdepunkterne i visse parabolske Segmenter. Disse Tyngdepunkter finder man nutildags meget let ved Hjælp af Integralregningen. Zeuthen kunde da heller ikke i de nævnte Monografier tænke sig andet end at Fermat maatte have gjort en maaske indirekte Anvendelse deraf (selv siger Fermat intet om sin Methode). Men i det senere Værk, jeg nu omtaler, er dette helt anderledes; her viser han, hvorledes Fermat særdeles vel kunde være kommen igennem uden Integralregningen, nemlig ved Benyttelse af det gamle Archimediske Princip, at i ligedannede Figurer ligger Tyngdepunkterne i ensliggende Punkter. Episoden viser ogsaa, at man i Fermats Dage stod Oldtidens Methoder nærmere end nutildags.

Som Exempel paa den Forbindelse mellem Prof. Zeuthen og Prof. Heiberg, som saa tidlig blev indledet, kan jeg fra denne Periode nævne Zeuthens Medarbejderskab ved Udgivelsen af det mærkelige Archimediske Skrift, »Ephadikan«, som blev funden af Prof. Heiberg.

Jeg maa nu vende mig til Zeuthens rent systematiske Arbejder i dette Tidsrum. Jeg har tidligere nævnt, at i den første Periode anvendte han som sit væsentligste Vehikel Chasles' Korrespondancesætning. Det er nu helt forandret; nu spiller Principet for Antallenes Vedligeholdelse den dominerende Rolle, og det er det, der stilles i Spidsen. Zeuthen har ganske rigtigt set, at denne Methode hurtigere og overskueligere end nogen anden fører til Opgavens Løsning; for at bruge den med Sikkerhed kræves rigtignok geometrisk Takt, men her var Zeuthen den uforlignelige Mester. Alt dette — sammen med en Række nye Anvendelser — findes i hans store »Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie« fra 1914. Dette er en Bog, der holder mere end dens Titel lover; den er i Virkeligheden en omfattende Lærebog i de algebraiske Kurvers og Fladers Theori.

Digitized by Google

Men til Slut maa jeg atter, om end kun med et Par Ord, vende mig til Zeuthens historiske Arbejder fra hans sidste Aar. Efter tidligere at være trængt dybt ind i Oldtidens mathematiske Viden fra dens Guldalder, søger han i sine sidste Arbejder længere tilbage, til det naturlige og ligefremme Grundlag, som maa gaa forud for enhver formel Opbygning af en Videnskab. Og ad den Vej er han kommen til ogsaa at interessere sig for de moderne Undersøgelser over Geometriens Grundlag. Begge Steder er man efter hans Opfattelse nær ved Intuitionen, den Undergrund, hvor alle Ideer har deres Ophav.

En Mand med Zeuthens Anseelse samlede naturligvis i sit lange Liv en Mængde Æresbevisninger, og mange er de danske Mathematikere, der i Udlandet har nydt godt af i Fædrelandet at have en Mand med internationalt Ry. Han havde den Lykke i sine sidste to store ovennævnte Værker at faa samlet i hvert Fald en stor Del af sine Hovedresultater; Kendskab til disse Arbejder vil høre med til danske Mathematikeres Uddannelse, og Uddybelsen af hans Methoder vil endnu i lang Tid kunne være Kilde til værdifuldt videnskabeligt Arbejde.

Alle vi, der har kendt ham, vil mindes baade hans fine Karakter og den Ro og videnskabelige Kraft, hvormed han arbejdede til sine sidste Dage.

C. Juel.

Digitized by Google

En Række elementære Sætninger om Cirkler.

Af Stud. mag. David Fog.

Som bekendt kræves der til Skoleembedseksamen efter den nye Ordning et Kursusarbejde over elementær Matematik; det er ved Arbejdet med et saadant, omhandlende den Malfatti'ske Opgave, at jeg er bleven ført ind paa nedenstaaende Betragtninger.

De Sætninger, som her skal omtales, er af ret elementær Karakter; nogle er, saa vidt jeg ved, nye, medens andre er velkendte; men de Beviser, man i Almindelighed giver for disse sidste, er ikke tilfredsstillende, da de bygger paa en ufuldstændig Figurbetragtning. Det skal i det følgende vises, hvorledes man ved en systematisk Indførelse af Fortegnsregning kommer ud over saadanne Vanskeligheder.

§ 1.

Vi vil i det følgende altid, naar andet ikke udtrykkelig bemærkes, ved Ordene ret Linie og Cirkel forstaa orienteret ret Linie og Cirkel, ɔ: disse forsynede med en bestemt positiv Retning. Paa Linierne vil vi regne Afstande med Fortegn paa sædvanlig Maade. En ret Linie, der (i sædvanlig Forstand) rører en Cirkel, skal her kaldes en *ægte Tangent* (eller blot Tangent) til denne, saafremt Liniens og Cirklens positive Retning i Røringspunktet er overensstemmende; i modsat Fald skal Linien kaldes en *uægte Tangent.* Er to Linier begge Tangenter til en Cirkel, faar vi:

Tangenterne fra et Punkt til en Cirkel er lige store med modsat Tegn, regnede fra Punktet til Røringspunkterne.

Naar der i det følgende omtales Trekanter, Firkanter etc., tænkes disses Sider altid som uendelige orienterede rette Linier. — Der findes uendelig mange Cirkler, der tangerer to givne, hinanden skærende Linier; de ligger alle i to Vinkelrum, hvis Vinkler er Topvinkler; som Følge heraf findes der én og kun én Cirkel, der tangerer en given Trekants Sider. Lad os betragte en Firkant $ABCD$, hvis Sider alle er Tangenter til samme Cirkel. Lad Røringspunkterne (Fig. 1) være α, β, γ og δ; vi faar da:

Digitized by Google

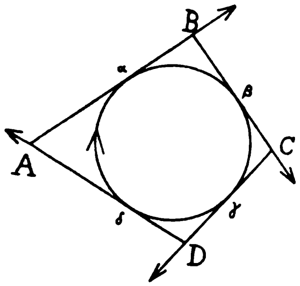


Fig. 1.

$$AB = A\alpha + \alpha B;\ BC = B\beta + \beta C,$$
$$CD = C\gamma + \gamma D;\ DA = D\delta + \delta A.$$

Addition giver:

$$AB + CD = BC + DA, \qquad (1)$$

idet ifølge det foregaaende $\alpha B = B\beta$ og de analoge.

Lad os specielt antage A uendelig fjernt ɔ: αB og δD parallele; lad en vilkaarlig Linie vinkelret paa disse to Linier skære dem i henholdsvis A_1 og A_2; da er $A_1\alpha = \delta A_2$; gaar vi ellers frem som før, faar vi Relationen:

$$A_1B + CD = BC + DA_2. \qquad (2)$$

Lad os dernæst betragte en Firkant $ABCD$, hvis Sider tilfredsstiller (1). Vi tegner den Cirkel, der tangerer AB, BC og CD; den ene Tangent fra D til denne Cirkel er DC. Lad den anden være l; der kan nu tænkes to Muligheder:

a) l skærer AB i A'; da har vi ifølge det ovenfor beviste:

$$A'B + CD = BC + DA'. \qquad (3)$$

(1) og (3) giver ved Subtraktion:

$$AB - A'B = DA - DA' \text{ ɔ:}$$
$$AA' = DA - DA',$$

hvilket kun er muligt, naar A og A' falder sammen ɔ: Firkanten $ABCD$'s Sider tangerer alle samme Cirkel.

b) l er $\neq AB$. Lad den vinkelrette fra A paa l skære denne i A_2; vi har da ifølge (2):

$$AB + CD = BC + DA_2,$$

hvoraf ved Sammenligning med (1):

$$DA = DA_2,$$

hvilket er umuligt.

Vi har da bevist:

D e n n ø d v e n d i g e o g t i l s t r æ k k e l i g e B e t i n g e l s e f o r, a t a l l e f i r e S i d e r a f e n F i r k a n t $ABCD$ e r T a n g e n t e r t i l s a m m e C i r k e l, e r, a t

$$AB + CD = BC + DA. \qquad (3)$$

Digitized by Google

Firkanten kaldes da *(ægte) omskrivelig.* Ovenstaaende Ligning udtrykker naturligvis ogsaa, at alle fire Sider er uægte Tangenter til samme Cirkel. Betingelsen for, at det ene Par modstaaende Sider er ægte, det andet Par uægte Tangenter, faas ved Tegnskiftning for Leddene paa en af Siderne i (3); den bliver:

$$AB + BC + CD + DA = 0. \tag{4}$$

Firkanten kaldes da *uægte omskrivelig.*

§ 2.

Vi vil betragte en ret Linie, der (i sædvanlig Forstand) rører to orienterede Cirkler; hvis den kan orienteres saaledes, at den er ægte Tangent til begge Cirkler, kaldes den en *ægte Fællestangent* (eller blot Fællestangent) til de to Cirkler; der vil kunne være 0, 1 eller 2 saadanne; er der én, siges Cirklerne at have ægte Berøring. Er Cirklerne orienterede, saa de har samme Omløbsretning, er det de udvendige Fællestangenter, som er ægte; gaar Omløbet derimod modsat Vej, er det de indvendige. En ægte Fællestangent tænkes her altid orienteret paa ovennævnte Maade (og altsaa ikke saaledes, at den er uægte Tangent til begge de rørende Cirkler).

Hvis den betragtede Linie, hvordan den end orienteres, bliver ægte Tangent til den ene af Cirklerne og uægte til den anden, kaldes den en *uægte Fællestangent* til de to Cirkler, der kan være 0, 1 eller 2 saadanne; er der én, siges Cirklerne at have uægte Berøring. Har de to Cirkler samme Omløbsretning, er det de indvendige Fællestangenter, som er uægte; gaar Omløbet modsat Vej, er det de udvendige. Paa uægte Fællestangenter vil vi regne med Fortegn paa følgende Maade:

Lad de to Cirkler (Fig. 2) være I og II, l en uægte Fællestangent, P og Q to Punkter paa denne; $(PQ)_I$ skal da betyde Afstanden fra P til Q, idet Linien er orienteret, saa den er ægte Tangent til I. Analog Betydning for $(PQ)_{II}$. Da de to Retninger er modsatte, haves:

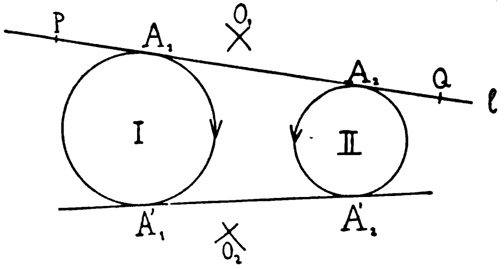


Fig. 2.

Digitized by Google

$$(PQ)_I = -(PQ)_{II}.$$

Da endvidere $(PQ)_I = -(QP)_I$, faas ogsaa $(PQ)_I = (QP)_{II}$.

Vi vil vedtage, at saafremt Endepunktet af Liniestykket er Røringspunkt med den Cirkel, der staar som Index, da at udelade dette Mærke. Er A_1 og A_2 Røringspunkterne med henholdsvis I og II, skrives altsaa PA_1 for $(PA_1)_I$ og PA_2 for $(PA_2)_{II}$.

Vi faar nu umiddelbart:

$$A_1A_2 = (A_1A_2)_{II} = (A_2A_1)_I = A_2A_1.$$

$A_1A_2 = A_2A_1$ kaldes Længden af den betragtede uægte Fællestangent; da de to uægte Fællestangenter ligger symmetrisk med Hensyn til Centerlinien, faas:

$$A_1A_2 = -A'_1A'_2,$$

naar A'_1 og A'_2 er den andens Røringspunkter.

Lad nu O være et vilkaarligt Punkt paa l; vi har da ifølge den almindelige Lære om Fortegnsregning:

$$(A_1O)_{II} + (OA_2)_{II} = (A_1A_2)_{II},$$

hvoraf, da $(A_1O)_{II} = OA_1$:

$$OA_1 + OA_2 = A_1A_2 \quad ɔ:$$

I. Dersom O er et Punkt af en uægte Fællestangent, og Røringspunkterne er A_1 og A_2, gælder Ligningen:

$$OA_1 + OA_2 = A_1A_2\,(= A_2A_1).$$

Vi vil bevise den omvendte Sætning. Vi regner foreløbig uden Orienteringer og Fortegn og beviser, at: Hvis Summen eller Differensen af Tangenterne fra et Punkt til to Cirkler er lig Længden af en Fællestangent, ligger Punktet paa denne Fællestangent eller paa den tilsvarende. (At to Fællestangenter er tilsvarende, vil sige, at de enten begge er udvendige eller begge indvendige, altsaa, naar vi regner med Fortegn, enten begge ægte eller uægte).

Lad os (Fig. 2) søge et Punkt O, naar Tangentlængderne til I og II er givne; O bestemmes som Skæringspunkt mellem to Cirkler, koncentriske med de to givne; der kan derfor højst

Digitized by Google

blive to Punkter. Saafremt Sum eller Differens af de to Tangentlængder er lig Længden af de udvendige Fællestangenter (A_1A_2 og $A'_1A'_2$), er der en Løsning paa hver af disse Linier og altsaa ingen udenfor; ligesaa for de indvendige, og hermed er ovenstaaende Sætning bevist. Regner man nu med Fortegn, kan den, som man let ser, formuleres saaledes:

II. Saafremt man fra et Punkt kan trække to saadanne Tangenter til Cirklerne I og II, at Summen bliver lig Længden af en af de uægte Fællestangenter, ligger Punktet paa en af disse Fællestangenter.

§ 3.

Vi vil betragte tre Cirkler og et Sæt uægte Fællestangenter til disse ɔ: tre Linier, der er uægte Fællestangenter for to og to af Cirklerne. Saadanne tre Tangenter maa enten alle være indvendige, eller ogsaa maa en være indvendig og de andre to udvendige. Vi beviser nu:

III. Dersom et Sæt uægte Fællestangenter til tre Cirkler gaar igennem samme Punkt, er deres Sum nul.

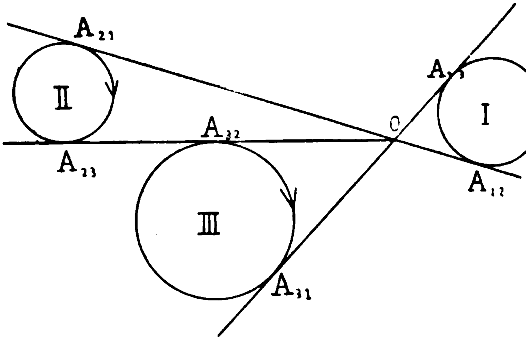


Fig. 3.

Lad Cirklerne være I, II, III, Tangenternes fælles Punkt O og Røringspunkterne betegnede som paa Figuren (Fig. 3). Sætning I giver da:

$$OA_{12} + OA_{21} = A_{12}A_{21},$$
$$OA_{23} + OA_{32} = A_{23}A_{32},$$
$$OA_{31} + OA_{13} = A_{31}A_{13}.$$

Adderes disse Ligninger, faas, da $OA_{12} + OA_{13} = 0$ og

Digitized by Google

de analoge, at

$$A_{12}A_{21} + A_{23}A_{32} + A_{31}A_{13} = 0.$$

Omvendt kan vi bevise:

IV. Dersom Summen af et Sæt uægte Fællestangenter er nul, gaar de igennem samme Punkt.

Vi betragter igen Fig. 3 og har nu:

$$A_{12}A_{21} + A_{23}A_{32} + A_{31}A_{13} = 0.$$

Antages endvidere O at være Skæringspunktet for $A_{23}A_{32}$ og $A_{31}A_{13}$, faas af Sætning I:

$$OA_{23} + OA_{32} = A_{23}A_{32},$$
$$OA_{31} + OA_{13} = A_{31}A_{13}.$$

Subtraheres disse to Ligninger fra den foregaaende, faas let:

$$OA_{12} + OA_{21} = A_{12}A_{21}.$$

O ligger da ifølge Sætning II paa $A_{12}A_{21}$ eller den tilsvarende $(A'_{12}A'_{21})$; dette sidste er umuligt i Almindelighed; thi saa fik man af Sætning III:

$$A'_{12}A'_{21} + A_{23}A_{32} + A_{31}A_{13} = 0 \quad \text{ɔ:}$$
$$A_{12}A_{21} = A'_{12}A'_{21} = 0,$$

men da falder de to uægte Fællestangenter sammen (I og II har uægte Berøring), saa IV gælder almindeligt. Vi skal ikke her komme ind paa Grænsetilfælde, hvor to af de tre uægte Fællestangenter i et Sæt falder sammen.

Naar et Sæt uægte Fællestangenter til tre Cirkler har Summen nul, har det tilsvarende Sæt samme Egenskab; da giver III og IV:

V. Dersom et Sæt uægte Fællestangenter til tre Cirkler gaar igennem samme Punkt, gør det tilsvarende Sæt det ogsaa[1]).

Ved Anvendelse heraf kan vi bevise følgende:

VI. Dersom man fra to Punkter paa hver sin af de uægte Fællestangenter til to Cirkler trækker Tangenterne til disse, vil de fire Linier alle tangere en Cirkel; denne kan orienteres, saa alle fire Linier

---

[1]) Se A. S. Hart (Quaterly Journal of Mathematics, Bind 1, Side 219). Beviset er skitseret.

bliver uægte (eller alle ægte) Fællestangenter til den og en af de oprindelige[1]).

Lad Cirklerne (Fig. 4) være I og II, Punkterne O og O_1 paa de uægte Fællestangenter p og q; de fire punkterede Linier α, β, γ og δ er Tangenterne fra O og O_1. Vi tænker os tegnet en Cirkel III, som rører α, β og γ, saaledes at disse bliver uægte Fællestangenter til denne og en af de oprindelige; III er entydig bestemt. Et Sæt uægte Fællestangenter for de tre Cirkler gaar nu gennem samme Punkt (O); det tilsvarende Sæt maa da ogsaa gaa gennem samme Punkt (Sætning V); dette maa være O_1; thi her skærer q og γ hinanden; da maa δ være uægte Fællestangent for I og III.

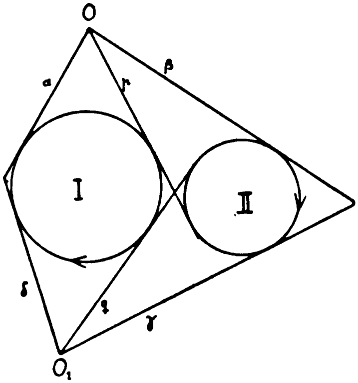


Fig. 4.

§ 4.

Vi vil bevise en Sætning, som specielt indeholder Sætning V. Lad (Fig. 5) I, II, III være tre Cirkler; vi tegner et Sæt uægte Fællestangenter til dem; Skæringspunkter og Røringspunkter betegnes som paa Figuren; vi faar da:

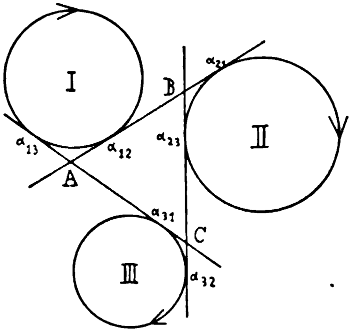


Fig. 5.

$$(\alpha_{12}\alpha_{21})_{II} = (\alpha_{12}A)_{II} + (AB)_{II} + (B\alpha_{21})_{II}$$

eller

$$\alpha_{12}\alpha_{21} = A\alpha_{12} + (AB)_{II} + B\alpha_{21};$$

analogt faas:

$$\alpha_{23}\alpha_{32} = B\alpha_{23} + (BC)_{III} + C\alpha_{32}.$$
$$\alpha_{31}\alpha_{13} = C\alpha_{31} + (CA)_{I} + A\alpha_{13}.$$

Addition af disse Ligninger giver:

$$\alpha_{12}\alpha_{21} + \alpha_{23}\alpha_{32} + \alpha_{31}\alpha_{13} = (AB)_{II} + (BC)_{III} + (CA)_{I}. \quad (1)$$

---

[1]) Sætningen findes i ufuldstændig Form hos Julius Petersen (Crelles Journal, Bind 89, S. 131).

Digitized by Google

Vi betragter nu det tilsvarende Sæt uægte Fællestangenter; betegnes de nye Punkter som deres tilsvarende, blot forsynede med et Mærke, faar vi:

$$\alpha'_{12}\alpha'_{21} + \alpha'_{23}\alpha'_{32} + \alpha'_{31}\alpha'_{13} = (A'B')_{II} + (B'C')_{III} + (C'A')_{I}. \quad (2)$$

De to Summer paa venstre Side i de to Ligninger er lige store med modsat Tegn ɔ:

VII. De to Trekanter ABC og $A'B'C'$, som dannes af to tilsvarende Sæt uægte Fællestangenter til tre Cirkler, opfylder Betingelsen:

$$(AB)_{II} + (BC)_{III} + (CA)_{I} = -((A'B')_{II} + (B'C')_{III} + (C'A')_{I}).$$

Heri er øjensynlig Sætning V indeholdt; thi naar den ene Perimeter er nul, maa den anden ogsaa være det. Er Tangenterne forskellige Linier, maa de altsaa gaa igennem samme Punkt.

Sætning VII kan let udvides til et vilkaarligt Antal Cirkler; den kan formuleres saaledes:

Perimetrene af de to n-Kanter, som dannes af to tilsvarende Sæt uægte Fællestangenter til n Cirkler, er lige store med modsat Tegn, naar man regner med Fortegn analogt med ovenfor.

Betegnelsen »et Sæt uægte Fællestangenter« er da saaledes at forstaa: Cirklerne ordnes i Rækkefølge, og man vælger en uægte Fællestangent til den første og den anden, en til den anden og den tredje o. s. v., en til den n^{te} og den første.

Lad specielt alle Cirkler have uægte Berøring med deres to Nabocirkler, saa falder de to Polygoner sammen; da her alle Led paa venstre Side i den tilsvarende Ligning til (1) forsvinder, faar vi følgende Sætning:

Den Polygon, som dannes af de uægte Fællestangenter til en Samling Cirkler, af hvilke hver har uægte Berøring med sine to Naboer, har Perimetren nul, naar man regner med Fortegn som ovenfor.

Vi vil særlig betragte det specielle Tilfælde $n = 4$; her faar vi:

$$(AB)_{II} + (BC)_{III} + (CD)_{IV} + (DA)_{I}$$
$$= -((A'B')_{II} + (B'C')_{III} + (C'B')_{IV} + (D'A')_{I}).$$

Dersom den ene Sum er nul, er den anden det ogsaa; dette kan ifølge § 1, (4) udtrykkes saaledes:

VIII: Dersom Firkant $ABCD$ er uægte omskrivelig, gælder det samme Firkant $A'B'C'D'$, idet Firkanternes Sider er orienterede som angivet i ovenstaaende Ligning.

Rører specielt Cirklerne hinanden uægte, faar vi:

Den Firkant, som dannes af de fire uægte Fællestangenter er uægte omskrivelig.

Hvis vi i det almindelige Tilfælde skifter Orientering for I og III samt for Siderne BC, DA, $B'C'$ og $D'A'$, bliver alle Linier ægte Fællestangenter til to af de givne Cirkler, og de bliver ogsaa hver især ægte Tangent til en af Firkanternes indskrevne Cirkler, naar disse orienteres paa passende Maade; da kan VIII ogsaa formuleres saaledes:

IX: Dersom et Sæt ægte Fællestangenter for fire Cirkler danner en omskrivelig Firkant, gør det tilsvarende Sæt det ogsaa.

Denne Formulering kunde vi ogsaa have fundet direkte saaledes: Lad (Fig. 6) I, II, III, IV være fire Cirkler; vi tegner et Sæt ægte Fællestangenter til dem; Skæringspunkter og Røringspunkter betegnes som paa Figuren; vi faar da, idet Fællestangenterne er orienterede i Overensstemmelse med deres berørende Cirkler:

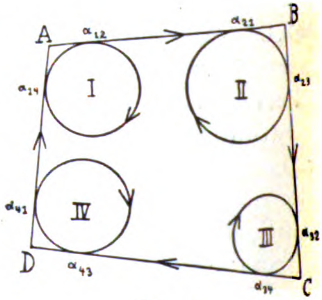


Fig. 6.

$$AB = A\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_{21} + \alpha_{21}B; \quad BC = B\alpha_{23} + \alpha_{23}\alpha_{32} + \alpha_{32}C$$
$$CD = C\alpha_{34} + \alpha_{34}\alpha_{43} + \alpha_{43}D; \quad DA = D\alpha_{41} + \alpha_{41}\alpha_{14} + \alpha_{14}A.$$

Heraf faas let ifølge Sætningen om Tangenterne fra et Punkt til en Cirkel (§ 1), at Betingelsen

$$AB + CD = BC + DA \tag{3}$$

medfører

$$\alpha_{12}\alpha_{21} + \alpha_{34}\alpha_{43} = \alpha_{23}\alpha_{32} + \alpha_{41}\alpha_{14} \tag{4}$$

og omvendt.

Betragter vi nu den mærkede Firkant $A'B'C'D'$, er det klart, at (3) medfører den samme Betingelse for mærkede Bogstaver; thi dette gælder nemlig (4). Hermed er IX vist paany.

Digitized by Google

Vi lægger Mærke til den dobbelte Formulering af ovenstaaende Sætning (VIII og IX) og de to forskellige Beviser; dette hænger sammen med, at den karakteristiske Forskel, som findes mellem ægte og uægte Fællestangenter, saa længe Cirklernes Antal er ulige, forsvinder, naar det bliver lige. Et Sæt uægte Fællestangenter for et lige Antal Cirkler føres, naar Orienteringen skiftes for hver anden Cirkel, over i et Sæt ægte, og omvendt. Noget tilsvarende er ikke muligt, naar Cirklernes Antal er ulige.

Et Sæt ægte saavel som et Sæt uægte Fællestangenter til fire Cirkler vil altid være enten alle udvendige eller alle indvendige eller to udvendige og to indvendige.

I Sætning IX forekommer 6 Cirkler; vi vil betegne Firkanternes indskrevne Cirkler V og VI; Fig. 7 er en skematisk Figur; den store Cirkel er VI; vi deler Cirklerne i tre Par: (I III), (II IV) og (V VI), disse tre Par optræder symmetrisk i Sætningen. Betragter vi saaledes I, V, III, VI som de givne Cirkler, er α', β', β, α et Sæt Fællestangenter; danner de en omskrivelig Firkant, ɔ: forudsætter vi II's Eksistens, giver Sætning IX, at det tilsvarende Sæt Fællestangenter, altsaa δ', γ', γ, δ ogsaa danner en omskrivelig Firkant, hvilket fører til Cirklen IV's Existens.

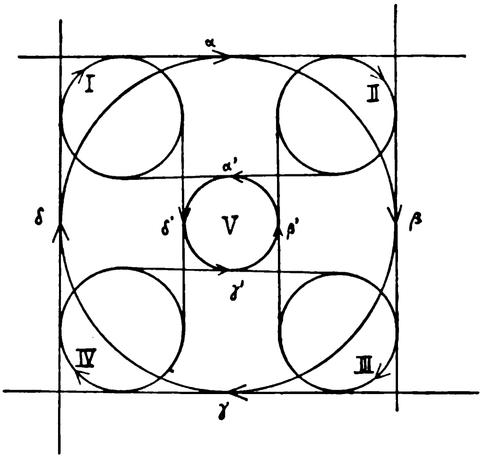


Fig. 7.

Herved ser vi bl. a., at en Udvidelse af Sætning IX i Analogi med den, der førte fra Sætning V til VI, er umulig, eller rettere, den fører til samme Sætning IX igen.

§ 5.

Vi vil bevise en Sætning, som staar i en vis Forbindelse med IX, som vi i en følgende Paragraf nærmere skal gaa ind paa; vi maa dog først gøre et Par Bemærkninger.

Cirkler og Linier antages i denne Paragraf ikke orienterede.

Digitized by Google

Ved en fuldstændig Vinkel forstaas Samlingen af to Linier, tagne i en bestemt Orden. Hvorledes man regner med fuldstændige Vinkler, forudsættes her bekendt[1]).

Betragter vi en Cirkel, en Korde k og Tangenterne a og b i dens Skæringspunkter med Cirklen, haves

$$(ak) = -(bk). \tag{1}$$

Skærer to Cirkler hinanden i A og B, og kaldes Tangenterne i det første Punkt α_1 og α_2, i det andet β_1 og β_2, faas, idet Linier med samme Index tænkes at tangere samme Cirkel:

$$(\alpha_1\alpha_2) = -(\beta_1\beta_2). \tag{2}$$

Betingelsen for, at en Firkant er indskrivelig, forudsættes kendt; kaldes Siderne, i den Orden de følger efter hinanden, for a, b, c og d, kan den skrives:

$$(ab) + (cd) = (bc) + (da). \tag{3}$$

Lad os nu betragte fire Cirkler I, II, III, IV; ved »et Sæt Skæringspunkter« skal forstaas Samlingen af et Skæringspunkt mellem I og II, et mellem II og III, et mellem III og IV og et mellem IV og I; lad et saadant Sæt Skæringspunkter være A, B, C, D (Fig. 8); vi trækker Tangenterne til Cirklerne i disse Punkter og

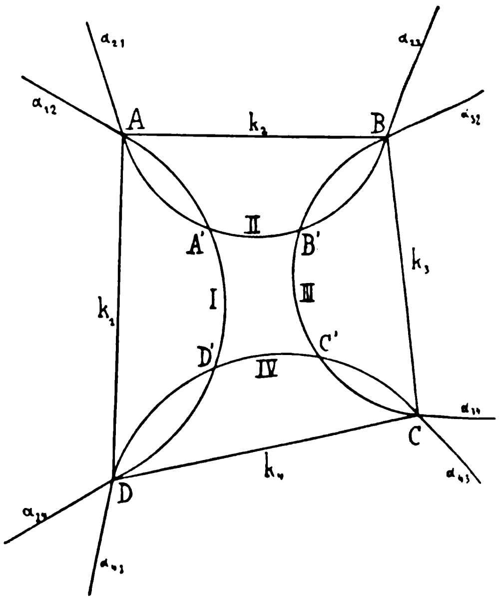


Fig. 8.

[1]) Se Prof. Hjelmslev: Kongruens og Symmetri (Nyt Tidsskrift for Matematik, B, 1907, S. 1).

Digitized by Google

betegner dem som vist paa Figuren; Korderne kaldes k_1, k_2, k_3 og k_4.

Læren om fuldstændige Vinklers Addition giver nu:

$$(k_1k_2)=(k_1\alpha_{12})+(\alpha_{12}\alpha_{21})+(\alpha_{21}k_2);\ (k_2k_3)=(k_2\alpha_{23})+(\alpha_{23}\alpha_{32})+(\alpha_{32}k_3)$$
$$(k_3k_4)=(k_3\alpha_{34})+(\alpha_{34}\alpha_{43})+(\alpha_{43}k_4);\ (k_4k_1)=(k_4\alpha_{41})+(\alpha_{41}\alpha_{14})+(\alpha_{14}k_1)$$

Man ser nu ved Addition og Brug af (1), at Betingelsen

$$(\alpha_{12}\alpha_{21}) + (\alpha_{34}\alpha_{43}) = (\alpha_{23}\alpha_{32}) + (\alpha_{41}\alpha_{14}) \tag{4}$$

medfører

$$(k_1k_2) + (k_3k_4) = (k_2k_3) + (k_4k_1) \tag{5}$$

og omvendt.

Betragter vi nu det tilsvarende Sæt Skæringspunkter og den deraf dannede Firkant, og betegnes de nye Punkter og Linier som deres tilsvarende, blot ved et Mærke, faar vi ved (2), at Betingelsen (4) medfører den tilsvarende Betingelse for mærkede Bogstaver; dette gælder ifølge ovenstaaende da ogsaa (5).

Ved Hjælp af (3) kan dette Resultat udtrykkes saaledes:

X: Dersom et Sæt Skæringspunkter for fire Cirkler bestemmer en indskrivelig Firkant, gør det tilsvarende Sæt det ogsaa[1]).

Cirklerne kan her parres to og to paa samme Maade som ved IX.

§ 6.

Vi vil nu gaa over til Kuglen og vise, at de foregaaende Sætninger næsten umiddelbart kan overføres paa den sfæriske Geometri.

Som Grundelementer (svarende til Punkt, orienteret ret Linie og orienteret Cirkel i Planen) vil vi vælge henholdsvis:

1) Punktpar, bestaaende af to diametralt modsatte Punkter,
2) Orienteret Storcirkel,
3) Orienteret Cirkelpar, bestaaende af to diametralt modsatte Cirkler, orienterede saaledes, at naar et Punkt gennemløber den ene i positiv Retning, det diametralt modsatte da gennemløber den anden ligeledes i positiv Retning.

Vi definerer Afstanden fra et Punktpar A til et Punktpar B (idet Storcirklen gennem A og B tænkes orienteret) som

[1]) Sætningen findes hos Julius Petersen (Crelles Journal Bind 89, Side 131).

Digitized by Google

Afstanden fra et af Punkterne A til et af Punkterne B plus et vilkaarligt Multiplum af π.

Heretter kan vi ræsonnere ganske som i de foregaaende Paragraffer, idet vi indfører de nye Grundelementer; der bliver kun nogle uvæsentlige Forandringer hidrørende fra Ubestemtheden paa $p\pi$. Vi har derfor:

De tidligere beviste Sætninger kan umiddelbart overføres paa Kuglen.

Som bekendt vil Samlingen af Storcirkler ved stereografisk Projektion paa en Tangentplan føres over i et Cirkelnet, hvis Potens er $-d^2$, hvor d er Kuglens Diameter. Omvendt kan ethvert Cirkelnet med negativ Potens føres over i et Storcirkelnet paa en Kugle. Et Punktpar paa Kuglen vil svare til et Punktpar i Planen, som er tilsvarende i en Inversion med Røringspunktet til Centrum og Inversionspotensen $-d^2$. Vi siger, at de to Punkter er uægte Spejlbilleder i en Cirkel med Røringspunktet til Centrum og Radius d. (Naar de er tilsvarende i Inversionen med samme Centrum og Potensen $+d^2$, siges de at være ægte Spejlbilleder eller blot Spejlbilleder i den nævnte Cirkel). Et Cirkelpar paa Kuglen føres over i et Cirkelpar i Planen ɔ: i to Cirkler, der er hinandens uægte Spejlbilleder med Hensyn til ovennævnte Cirkel.

Anvendes denne Transformation paa Sætning V, faas følgende nye Sætning:

XI: Dersom et Sæt uægte Fællestangenter til tre Cirkelpar hører til samme Bundt, har det tilsvarende Sæt den samme Egenskab; en uægte Fællestangent er da at forstaa som en Netcirkel, der rører to af Cirkelparrene saaledes, at disse bestemmer modsatte Orienteringer paa den.

Ved en Inversion ser man, at ovenstaaende ogsaa gælder for et sfærisk Cirkelnet.

Det maa dog bemærkes, at Sætning XI her kun er vist for Net med negativ Potens; den gælder ogsaa, naar Potensen er positiv; men her opstaar nye Vanskeligheder ved Beviset, naar vi ikke vil gaa udenfor det reelle Omraade, saa dette vil vi ikke gaa nærmere ind paa.

§ 7.

Vi vil undersøge en velkendt sfærisk Transformation, der er bestemt saaledes:

Digitized by Google

Lad os betragte et orienteret Cirkelpar; vi tænker os tegnet en orienteret Storcirkel, der tangerer det, og vælger dens positive Pol, ɔ: den, hvorfra Omløbet ses at gaa med Uret; naar Storcirklen drejer sig, saa den stadig er ægte Tangent til Cirkelparret, vil Polen beskrive en Cirkel; denne giver vi ikke nogen Orientering. Omvendt kan vi gaa tilbage og fra Cirklen aflede det oprindelige orienterede Cirkelpar som Indhyllingskurve for de orienterede Storcirkler, hvis positive Pol ligger paa Cirklen.

Herved er defineret en én-éntydig Transformation, som fører orienteret Cirkelpar over i ikke-orienteret Cirkel.

Der er to Grænsetilfælde, idet det orienterede Cirkelpar kan konvergere mod et Punktpar eller mod en orienteret Storcirkel. Her definerer vi:

Et Punktpar skal føres over i den Storcirkel, som har Punkterne til Poler.

En orienteret Storcirkel skal føres over i sin positive Pol.

Vi ser nu let, at et orienteret Cirkelpar og et Punktpar beliggende paa dette føres over i en Cirkel og i en Tangent hertil (ɔ: en berørende Storcirkel). Et orienteret Cirkelpar og en orienteret Tangent (Storcirkel) hertil føres over i en Cirkel og et Punkt paa denne. To orienterede Cirkelpar og en Fællestangent føres over i to Cirkler og et Skæringspunkt. To Cirkelpar, der berører hinanden, føres over i to hinanden berørende Cirkler etc.

Ved Hjælp af denne Transformation kan vi af en af de foregaaende Sætninger danne en ny, en dualistisk tilsvarende. Saaledes ser vi straks, at Sætningerne IX og X svarer til hinden paa Kuglen. Vi vil søge en dualistisk tilsvarende til V. En uægte Fællestangent til to Cirkelpar er at opfatte som en Storcirkel, forsynet med begge sine Orienteringer; hver Orientering giver ægte Berøring med et af Cirkelparrene. To orienterede Cirkelpar og en uægte Fællestangent føres derfor over i to Cirkler og et Par diametralt modsatte Punkter, et paa hver af Cirklerne. To vilkaarlige Cirkler indeholder enten to, ét eller ingen saadanne Punktpar.

Heraf følger, at den dualistisk tilsvarende Sætning til V kommer til at lyde:

Digitized by Google

XII: Dersom et Sæt (tre Par) diametralt modsatte Punktpar for tre Cirkler ligger paa samme Storcirkel, gælder det samme det tilsvarende Sæt.

Inverterer vi Kuglen over i en Plan, faar vi en tilsvarende Sætning i Planen; denne er dog indeholdt i en almindeligere Sætning. Vi betragter et System af 6 Cirkler I, II, ···, VI; lad to tilsvarende Sæt Skæringspunkter være A, B, C, D, E, F og A', B', C', D', E', F'. Vi kan da bevise:

XIII: Dersom Sekskanten $ABCDEF$ er indskrivelig og dersom A, A' D, D' ligger paa en Cirkel og ligesaa B, B', E, E', da gælder det samme C, C', F, F' og Sekskanten $A'B'C'D'E'F'$ er indskrivelig.

Lad (Fig. 9) den store Cirkel kaldes VII, og lad de to punkterede Cirkler $AA'DD'$ og $BB'EE'$ være henholdsvis α og β. Vi betragter Cirklerne I, II, III, α; et Sæt Skæringspunkter for disse er B, C, D, A, som alle ligger paa Cirklen VII; da ligger det tilsvarende Sæt (B', C', D', A') ogsaa paa Cirkel sammen (Sætning IX); ved Betragtning af Cirklerne IV, V, VI, α faas paa samme Maade, at E', F', A', D' ligger paa Cirkel sammen, og endelig faas af Cirklerne II, III, IV, β, at Punkterne C', D', E', B' ligger paa samme Cirkel; sammenlignes nu Resultaterne, ses det, at Punkterne A', B', C', D', E', F' alle ligger paa samme Cirkel. Lad denne være VIII.

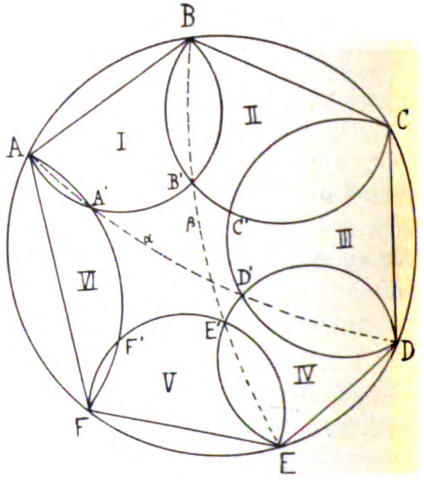


Fig. 9.

Vi betragter endelig Cirklerne III, VII, V, VIII i den nævnte Orden; et Sæt Skæringspunkter for disse er D, E, E', D' der alle ligger paa Cirklen IV; da ligger det andet Sæt Skæringspunkter (C, F, F', C') ogsaa paa samme Cirkel, og hermed er Sætningen bevist.

Man beviser let en dualistisk tilsvarende til XIII ved i Stedet for Sætning IX at bruge X. Denne sidste og XIII gælder ogsaa paa Kuglen.

Digitized by Google

En Bemærkning til: Om Fordelingen af ni Punkter o. s. v.

(Matematisk Tidsskrift A 1919 S. 117 og flg).

Af H. Paulli.

I ovennævnte Afhandling er paa S. 121, L. 3—5 f. n. om den der behandlede specielle Pascal's Sekskant udtalt, at den ikke i Almindelighed kan konstrueres med Passer og Lineal.

Jeg er senere bleven opmærksom paa, at dette ikke er rigtigt, og skal derfor med Redaktionens Tilladelse berigtige Bestemmelsen af Punktet 6^1. (Fig. 8, S. 121).

Dette Punkt bestemmes som Skæringspunkt mellem Kurven med Ligningen:

$$ax^3 + bx^2y - aby^2 - by^3 = 0 \tag{1}$$

og Cirklen gennem Punkterne 1′, 2′, 3′ og 4′. Punkterne 1′, 2′ og 3′ har Koordinaterne (0, 0), (0, — a) og (b, — a), og kaldes Vinklen mellem Koordinataksernes positive Retninger ω, bliver Cirklens Ligning:

$$x^2 + y^2 + 2\cos\omega \cdot xy + (2\cos\omega a - b)x + ay = 0. \tag{2}$$

Sættes i (1) og (2) $y = \mu x$ for $x \neq 0$, og løses disse m. H. t. x, faas:

$$x = \frac{ab\mu^2}{a + b\mu - b\mu^3} = \frac{-2\cos\omega a + b - a\mu}{1 + 2\cos\omega\mu + \mu^2},$$

hvoraf:

$$b^2\mu^3 + 2ab\mu^2 + (a^2 + 2\cos\omega ab - b^2)\mu + a(2\cos\omega a - b) = 0.$$

Sættes $\frac{a}{b} = \lambda$, faas ved Division med b^2:

$$\mu^3 + 2\lambda\mu^2 + (\lambda^2 + 2\cos\omega\lambda - 1)\mu + \lambda(2\cos\omega\lambda - 1) = 0,$$

der kan skrives saaledes:

$$(\mu + \lambda)(\mu^2 + \lambda\mu + 2\cos\omega\lambda - 1) = 0. \tag{3}$$

Til den Værdi af μ, der bestemmes af den første Faktor, svarer Punktet 3^1, medens 6^1 bestemmes ved den anden, kvadra-

Digitized by Google

tiske Faktor, der, eftersom $\omega \geqq \frac{\pi}{2}$ og $\lambda > 0$, giver to reelle Værdier af μ.

Da Sekskanten saaledes kan konstrueres med Passer og Lineal, behøver man ikke ved den Anvendelse af denne, som omtales paa S. 122, at optegne Kurven (1), men kan direkte bestemme Punktet 6^1 af (3).

BESVARELSERNE AF PRISOPGAVERNE FOR 1919.

Der er ialt indkommet tre Besvarelser paa Prisopgave I, mens der ingen Besvarelser er givet af II. Den første af dem, som skyldes Hr. Adjunkt Erik Holm, modtog vi allerede i April 1919, den anden senere hen paa Aaret, og endelig den tredje, som skyldes Hr. stud. mag. David Fog, kort før Udløbet af den forlængede Frist.

Vi har bedt Opgavestilleren Prof. Dr. phil. J. Hjelmslev om at vurdere de givne Besvarelser, og han har afgivet den efterfølgende Bedømmelse af dem.

1°. Adjunkt Erik Holms Besvarelse giver med de simpleste Midler den smukkeste Løsning af Opgaven. Den er kort — i sin første Del noget for kort — men iøvrigt klar og letlæselig. Den er et ægte Stykke Elementærgeometri, der fortjener mange Læsere. Jeg indstiller den til at belønnes med den første af de udsatte Præmier.

2°. Stud. mag. David Fogs Besvarelse behandler Opgaven ud fra mere almindelige, og derfor noget mindre elementære Synspunkter. I Tilslutning til Jul. Petersens Drejningsteori anstilles en almindelig Undersøgelse angaaende Bestemmelsen af en Firkant, der skal være omskreven om eller indskreven i en anden Firkant (Ordene taget i videste Forstand) og have en given Form. Resultaterne anvendes dernæst paa den foreliggende Opgave. Der opstilles nødvendige og tilstrækkelige Betingelser for, at en konveks Firkant har mere end eet omskrevet Kvadrat, og for, at den har mere end eet indskrevet Kvadrat, men Forf. synes ikke at have set, at Opgavens Ordlyd kræver begge Dele paa een Gang. Denne Mangel er dog af underordnet Betydning i Sammenligning med den Fuld-

Digitized by Google

stændighed og det geometriske Overblik, der ellers kendetegner Arbejdet. Jeg indstiller denne Besvarelse til at belønnes med den anden af de udsatte Præmier.

3⁰. Den tredje Besvarelse anvender en analytisk-geometrisk Fremstilling, der viser sig temmelig let overkommelig. Men den sproglige Form er lidet tilfredsstillende, og den matematiske Behandling er ikke udtømmende. Den analytiske Metode giver jo umiddelbart kun nødvendige Betingelser. Ved Udledelsen af disse, hvorved iøvrigt en vis Mangel paa Præcision i det hele gør sig gældende, tager Forf. sig ikke i Agt for, at visse Størrelser, der indgaar i hans Ligninger som Nævnere, kunde være Nul, hvorved andre Muligheder kunde indtræde. Hans Undersøgelse af de nødvendige Betingelser er derfor ikke komplet. Dernæst undlader Forf. helt at beskæftige sig med Spørgsmaalet om, hvorvidt de fundne Betingelser er tilstrækkelige. Af de fundne analytiske Betingelser udleder Forf. endelig rent geometriske Egenskaber ved Firkanten, men at disse er tilstrækkelige, bliver heller ikke eftervist. Til Trods for, at Forf. konkluderer i et Resultat, som i sig selv — bortset fra en uhjælpsom sproglig Form — er rigtigt, kan jeg dog ikke under Hensyn til de anførte Mangler indstille denne Besvarelse til nogen Belønning.

Hellerup, d. 11. Febr. 1920.

J. Hjelmslev.

I Henhold til denne Bedømmelse har Redaktionen tilkendt Adjunkt Erik Holm den udsatte I-Præmie og stud mag. David Fog II-Præmie.

De to Besvarelser vil blive offentliggjorte her i Tidsskriftet, den første er optaget allerede i dette Hefte, den anden vil fremkomme i 2. Hefte.

Besvarelse af Prisopgave I 1919.

Af Erik Holm.

Der ønskes en fuldstændig Undersøgelse af, hvilke Former en konveks Firkant kan have, naar den skal have mere end eet omskrevet Kvadrat og mere end eet indskrevet Kvadrat.

En konveks Firkant (Fig. 1) kan omskrives med et Kvadrat

ved at tegne Cirkler over et Par modstaaende Sider som Diametre og forbinde Midtpunkterne M og N af de indre Halvcirkler. Linien MN vil da skære de ydre Halvcirkler i Punkter, der bliver modstaaende Vinkelspidser i det søgte Kvadrat.

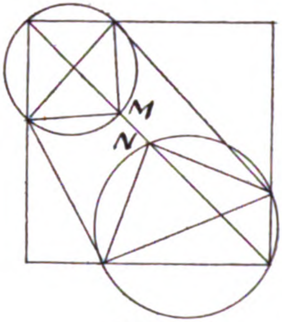


Fig. 1.

Skal Firkanten have mere end eet omskrevet Kvadrat, maa M og N falde sammen i eet Punkt O. Drejes en ret Linie om dette Punkt, vil den ved Skæring med de ydre Halvcirkler give et Par modstaaende Vinkelspidser i de forskellige omskrevne Kvadrater. I Fig. 2 er $ABCD$ en saadan Firkant. Det ses, at $\triangle AOC$ ved at drejes en ret Vinkel om O, kan bringes til at dække $\triangle BOD$, og at Firkantens Diagonaler bliver ligestore og vinkelrette paa hinanden.

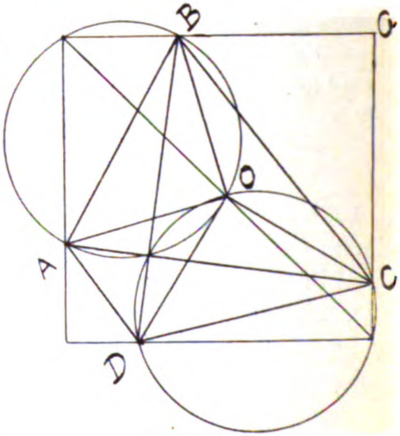


Fig. 2.

Omvendt, hvis en konveks Firkant $ABCD$ har $AC = BD$ og $AC \perp BD$, vil den have flere omskrevne Kvadrater; thi Drejningspunktet O findes som Skæringspunkt mellem AB's og CD's Midtnormaler.

Betingelsen for, at en konveks Firkant skal have mere end eet omskrevet Kvadrat, er, at Diagonalerne staa vinkelret paa hinanden og er ligestore.

Vi vil derefter undersøge, hvorledes et Kvadrat $EFGH$ — se Fig. 3 — omskrives med en konveks Firkant af bestemt Form.

Først bemærkes det, at Firkantens Form er fuldstændig bestemt ved de fire Vinkler x, y, u og v, som en Diagonal danner med Siderne; x og y har samme Toppunkt, x og u ligger paa samme Side af Diagonalen.

Over et Par modstaaende Sider som Korder tegnes to Cirkler, saa at de Buer, der ligger udenfor Kvadratet, rummer

Digitized by Google

Vinklerne $x+y$ og $u+v$. Vinkel EFP afsættes lig x, paa lignende Maade y, u og v, hver ved sin Vinkelspids, herved findes Skæringspunkterne P og Q. Linien PQ vil da skære de ydre Cirkelbuer i modstaaende Vinkelspidser A og C af den omskrevne Firkant $ABCD$.

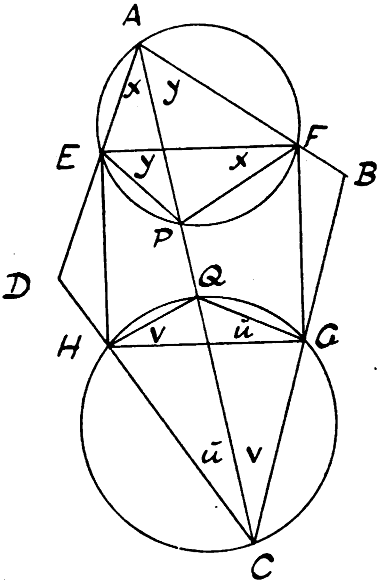


Fig. 3.

Skal Kvadratet have mere end een omskreven Firkant af bestemt Form, maa P og Q falde sammen i eet Punkt O (Fig. 4). Drejes en ret Linie om dette Punkt, vil den ved Skæring med de ydre Cirkelbuer give et Par modstaaende Vinkelspidser i de forskellige omskrevne Firkanter — alle med samme Form.

I Fig 4 gaas ud fra Kvadratet $EFGH$ og Punktet O. Gennem O trækkes en Linie parallel med EH. O deler den i Stykkerne p og q, den deler selv de to Kvadratsider i Stykkerne r og s.

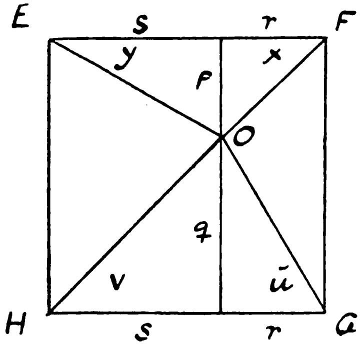


Fig. 4.

Formen af den tilsvarende omskrevne Firkant findes nu paa følgende Maade:

Ud ad to paa hinanden vinkelrette Linier — se Fig 5 — afsættes

$$O_1A = a = \frac{1}{p}, \quad O_1B = b = \frac{1}{s},$$

$$O_1C = c = \frac{1}{q} \text{ og } O_1D = d = \frac{1}{r}.$$

I Firkanten $ABCD$ danner Diagonalen AC da netop de rigtige Vinkler x, y, u og v med Siderne, og Vinklerne er rigtigt grupperet om AC. Denne Firkant har følgelig flere indskrevne Kvadrater. Ved at variere O's Beliggenhed indenfor Kvadratet findes de forskellige Former, som konvekse

Digitized by Google

Firkanter med flere indskrevne Kvadrater kan have. I alle Tilfælde maa dog

$$p + q = r + s$$

eller

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}.$$

Betingelsen for, at en konveks Firkant skal have mere end eet indskrevet Kvadrat er, at Diagonalerne staar vinkelret paa hinanden, og at de deler hinanden i Stykker, hvis reciproke Værdier har samme Sum.

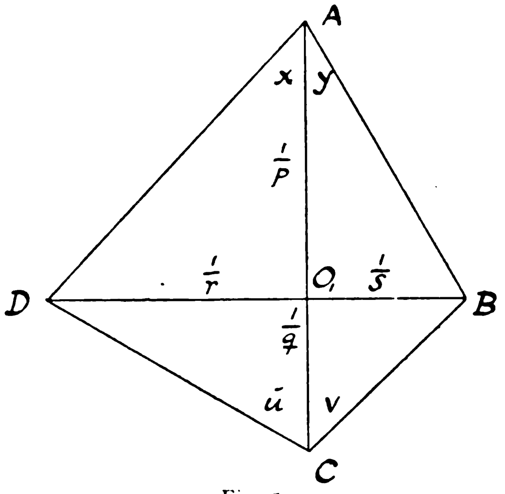


Fig. 5.

Skal en Firkant $ABCD$ have baade mere end eet omskrevet Kvadrat og mere end eet indskrevet Kvadrat, maa 1) Diagonalerne være vinkelrette paa hinanden,

2) $a + c = b + d$

3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.

Følgelig maa

$$ac = bd.$$

Dette er kun muligt, naar to modstaaende af de fire retvinklede Trekanter i Fig. 5 er ligebenede.

Resultatet er altsaa følgende:

Ethvert Trapez med ligestore Diagonaler, der er vinkelrette paa hinanden, har mere end eet omskrevet Kvadrat og mere end eet indskrevet Kvadrat.

Ingen andre konvekse Firkanter har ovennævnte Egenskaber. Kvadratet indbefattes under nævnte Trapezer.

Digitized by Google

Studenterforeningens Bibliotek

Litteraturanmeldelser.

Fortsat Anmeldelse af Archimedes' »Sandregning« og Aristarchos fra Samos' »Solens og Maanens Størrelse og Afstand.« Ved S. A. Christensen. (Nykøbing Katedralskoles Aarsprogram 1919). Se Aargang 1919. Hefte 4. Pag. 128.

Efter at Seminarieøvelsen nu er afholdt efter Feriens Slutning, tror jeg at kunne dokumentere, at det Ønske, Rektor S. A. Christensen nærer, at velbegavede Elever maa kunne lære hans Oversættelser, fuldt ud er gaaet i Opfyldelse. Det var en Fornøjelse at se, hvorledes vedkommende Elev havde sat sig ind i Skriftets Tankegang, og paa intet Punkt kom han til kort. Klart og tydeligt gengav han i 2 Timer hele Skriftet, og hele Klassen fulgte interesseret Udviklingen, hvori der tegnes saa klart et Billede af Archimedes Storhed. Min Kollega, Adjunkt H. Frisch overværede Øvelsen og har udtalt sig angaaende denne i nedennævnte Linier. Jeg beder endnu en Gang Rektor Christensen fortsætte med sine Oversættelser.

O. A. S.

Archimedes.

Den Tanke har ofte meldt sig under de mange Diskussioner for og imod Græsken i Skolen, om der ikke i selve det at gøre et sprogligt Medium til Erkendelsens Hovedgenstand, er noget afgjort ugræsk. Hvorfor spores der saa sjældent i Timerne i Oldtidssprogene den iltre, paagaaende Saglighed, som dog har skabt og bærer de fleste af de paagældende Tekster? Er det ikke snarere indenfor den matematiske Retning, man skal finde den Aandstype, som kommer den græske Epheb nærmest?

Disse Tanker kunde jeg ikke holde borte, da jeg for nylig ved Adjunkt *O. A. Smith*'s Elskværdighed blev indbudt til at høre en af hans Seminarøvelser i II G., hvor en Elev talte om *Archimedes*' Sandregning. Det var mig paafaldende, hvor sikkert denne unge Mand tumlede med de foreliggende Problemer, og hvor lige til han formaaede at tale i den store Grækers Tegnsprog. Det er netop Sagen: Tungemaal har disse to ikke fælles, men Symbolsproget — selve Tankens Sprog — taler de begge, og derved bliver Emnet ikke en Antikvitet, i hvis Beskuelse man dvæler, men en Realitet, som lever, idet man hører den. Hvad der her vejes og prøves er hver Paastands Sandhed eller Ikke-Sandhed. Den Iver, som faar den unge Foredragsholder til at ryste sine Formler af Ærmet, saa at en Ikke-Matematiker maa holde skarpt Udkig for at følge med, skyldes Emnet — Sagen selv. Hvad der sker er en Række Eksplosioner af Erkendelse og ikke den

simple reproduktive Erindringsakt, hvorved en Antikvitet fremstilles. Frygt for, at Originalens Aand skulde være udtyndet gennem den Oversættelse, der har ligget til Grund, har her ingen Plads; thi Aanden er jo netop de Symbolrækker, der tumles med.

At overvære en saadan Time er en Oplevelse for den, der kender Græsk, — ikke fordi der tales græsk, men fordi der, hvad der er endnu sjældnere, tænkes græsk.

Hartvig Frisch.

* * *

Tidsskrift för elementær Matematik, Fysik och Kemi, utgivn av Ad. Meyer, Otto Gallander, I. S. Hedström, G. Storck. Stockholm. Albert Bonniers Förlag. Andra Årgången. 3—4. Hefte.

Lektor Ad. Meyer indleder 3. Hefte med en Afhandling: Om seriesummeringar. Forf. opstiller flg. Definition: Med att summera funktionen $f(x)$ eller uträkna $\sum_m^n f(x)$ förstås att finna en funktion av m og n, som representerar summens värde och er ett »*slutet uttryck*« d. v. s. sådan, at den kan uttryckas gennem ett ändligt antal operationer med de 6 enkla räknesätten, samt trigonometriska funktioner, vilket antal operationer icke är beroende av m och n. Formaalet er at finde en Metode, hvorved saa mange Rækker som muligt kan summeres, en saadan Metode angives gennem flg. Grundsætning: »Om $f(x) = \varphi(x + 1) - \varphi(x)$ så är $\sum_m^n f(x) = \varphi(n + 1) - \varphi(m)^2$,« der bevises, og hvis Anvendelighed vises gennem en Række Exempler. C. Lönnqvist skriver om: Tillämpad matematik i skolans astronomikurs. Endvidere indeholder Heftet: M. Lemoine: Bidrag till frågan om fysiklaborationernas teknik. E. Hernqvist: Enkel anordning för bestämning av våglängder med gitter. I 4. Hefte skriver H. Petrini om: De geometriska axiomen i skolundervisningen. Y. Källén angiver en elegant Konstruktionsmetode til at dele et givet Liniestykke i »*gyllene snittet*«. W. Hallström skriver en ret fyldig Afhandling om: Elektronteori för metallisk ledning. Sven E. Ohlon om: Kristallers egensvängningar i ultrarött. Folke Berlinde om: Den Ohmska lagen i samband med grafisk fremställning. J. Lundberg redegør for nogle selvlavede

Digitized by Google

»väggtavlor med rörliga delar.« Begge Hefter indeholder Opgaver til Løsning og Løsninger paa tidligere Opgaver. I sidste Hefte er der en ganske interessant Bedømmelse af indsendte Løsninger af den stillede Prisopgave 1918—19. Den hermed sluttede anden Aargang af Tidsskriftet har fuldt ud holdt, hvad første Aargang lovede.

Chr. Jensen.

* * *

Wiskundig Tijdschrift onder Redactie van F. J. Vaes, met medewerking van vele wiskundigen. 16. Jaargang. 1919—20. Aflevering 1.

J. M. Hellenius fortsætter fra forrige Aargang en letlæselig Artikel om Plyckerske Koordinater.

J. L. v. Soest har undersøgt en Klasse Ovaler, Ægovaler, som defineres saaledes: Ægovalen er en lukket Kurve, der dannes af en Cirkel derved, at Forholdet mellem Afstandene fra Punkter paa Ovalen og tilsvarende Punkter paa Cirklen til en fælles Akse (Diameter) skal aftage jævnt fra Aksens ene Endepunkt til det andet. Ud fra denne Definition opstiller han Kurvens Ligning og finder flere interessante Egenskaber. Afhandlingen vil med Udbytte kunne læses af Elever i III. G. M.

C. Krediet har bevist følgende Sætninger om Keglesnit: 1) Lægger man gennem Brændpunkterne af et Keglesnit med Centrum en ligesidet Hyperbel, da er Halveringslinierne for de Vinkler, som Tangenterne fra Punkter paa Hyperblen til Keglesnittet danner, parallele med Hyperblens Akser. 2) Trækker man gennem en Parabels Brændpunkt en vilkaarlig ret Linie, da frembringer Halveringslinierne for Vinklerne, som Tangenterne fra Punkter paa Linien til Parablen danner, 2 Systemer af parallele Linier. 3) Har den Trekant, der dannes af 2 Tangenter og Fælleskorden til et Keglesnit konstant Areal, da er det geom. Sted for Tangenternes Skæringspunkt et Keglesnit ligedannet og ligedanbeliggende med det oprindelige med Centrum som Fællespunkt.

D. Pestma behandler Sætningerne:

En n-Kants Form er bestemt, naar der er givet $2n - 4$ Betingelser.

En n-Kants Form og Størrelse er bestemt ved $2n - 3$ Betingelser.

Digitized by Google

En n-Kants Form, Størrelse og Beliggenhed er givet ved $2n$ Betingelser.

R. Goormeghtigh: Om den rette Kissoides Krumningscirkel.

J. Beandoux: Hvorledes man kan undvære Aksen ved dobbeltretvinklet Afbildning.

H. J. Munzebrock beviser ved Hjælp af Stirlings Formel

$$p! = p^p \cdot e^{-p+\frac{D}{2p}} \cdot \sqrt{2\pi p} \quad \text{og} \quad \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdots$$

for $x = \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}$ o. s. v. Formlen:

$$\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdots \sin\frac{n-1}{n}\cdot\pi = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

M. V. Thébault kommer paa Grundlag af tidligere Arbejder til en Række Sætninger omhandlende Ortopalen til en Diameter i en om en Trekant omskreven Cirkel.

Desuden findes i Heftet Litteraturanmeldelser og Opgaver.

L. Willesen.

Danske Eksamensopgaver.

Almindelig Forberedelseseksamen.

Januar—Februar 1920.

Praktisk Regning.

1. Et Arbejde er blevet udført i 32 Dage, idet den daglige Arbejdstid de første 16 Dage var 10 Timer og de sidste 16 Dage 8 Timer.

Antallet af Arbejdere var de første 5 Dage 93, de næste 9 Dage 114, de næste 7 Dage 85 og i Resten af Tiden 96.

Hvis Arbejdsstyrken hele Tiden havde været 102 Mand. og den daglige Arbejdstid 9 Timer, hvor lang Tid vilde da Arbejdet have taget?

2. Hvor meget vejer den Mængde Kvægsølv, der kan fylde et halvkugleformet Kar, hvis Radius er 105 mm?

Til hvilken Højde vil denne Kvægsølvmængde staa i et cylindrisk Glas med Diameter 1,4 dm?

Kvægsølvs Vægtfylde er 13,6.

En Kugle med Radius r har Rumfanget $\frac{4}{3}\pi r^3$.

En Cylinder med Radius r og Højde h har Rumfanget $\pi r^2 h$.

Digitized by Google

Resultater:

1. 31 Dage.
2. 32,97 kg; 15,75 cm.

Aritmetik.

Beregn Værdien af

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a+63} - \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a+63}$$

for $a = 1$ og for $a = 0,56$.

2. I en Differensrække er Summen af de 4 første Led 68 og Summen af de 6 første Led 90. Find Rækkens Differens, det første Led og Summen af de 20 første Led.

3. Find x og y af Ligningerne

$$x + y + xy = 11.$$
$$\text{og } xy(x+y) = 30.$$

Resultater:

1. 4; 3,586.
2. $d = -2$; $a = 20$; $s = 20$.
3. $\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.,\ \left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right.$.

Geometri.

1. Konstruer en retvinklet Trekant, hvis ene Katete har en given Længde a, naar det tillige er givet, at Hypotenusen skal være 4 Gange saa lang som den anden Katete.

2. Midtpunkterne af Siderne i en Firkant er Vinkelspidser i et Kvadrat; bevis, at Firkantens Diagonaler er lige store og staar vinkelret paa hinanden.

3. I en Cirkel med Centrum O trækkes Diametren AB. Gennem Midtpunktet C af Halvcirklen AB og Midtpunktet M af Radien OB trækkes en Korde, hvis andet Endepunkt betegnes ved D.

Find Længderne af de 4 Liniestykker AC, CM, MD og BD, naar Cirklens Radius er r.

Resultater.

1. Kaldes den søgte Katete x, haves $a^2 + x^2 = 16x^2$, hvorefter x kan konstrueres som Mellemproportional mellem $\frac{a}{3}$ og $\frac{a}{5}$.

2. Diagonalerne bliver hver for sig parallele med to af Siderne i Kvadratet og dobbelt saa lange som disse Sider.

3. $AC = r\sqrt{2}$, $CM = \frac{r}{2}\sqrt{5}$, $MD = \frac{3\sqrt{5}r}{10}$, $BD = \frac{r\sqrt{10}}{5}$.

Digitized by Google

Realeksamen.

Januar—Februar 1920.

Regning og Matematik.

1. En Grosserer har købt 20 Tæpper, som hvert er 4 Yard langt og $3\frac{3}{4}$ Yard bredt, for en Pris af 1 £ 4 sh pr. Kvadrat-yard, hvortil kommer 30 pCt. Omkostninger.

Hvor mange pCt. tjener han, hvis han sælger Tæpperne for en Gennemsnitspris af 41,04 Kr. pr. m^2?

1 £ = 20 sh. = 18,62 Kr.; 1 Yard = 0,91 m.

2. I 10 paa hinanden følgende Aar, første Gang 1908, indskyder en Mand hver 1. Februar 200 Kr. i en Sparekasse, der forrenter Pengene med 4 pCt. p. a.

Hvor meget har han staaende i Sparekassen 1. Februar 1918?

3. Løs Ligningen

$$3\sqrt{x+64} + \sqrt{x+144} = 36.$$

Resultater.

1. 17 %.
2. 2496 Kr.
3. $x = 0$; $x = 297$ er Rod i $3\sqrt{x+64} - \sqrt{x+144} = 36$.

Mellemskoleeksamen.

Januar—Februar 1920.

Regning.

1. A købte i en Tørvemose 18000 Tørv for 14 Kr. pr. 1000 Tørv. For Hjemkørsel betalte han 12 Kr. pr. Læs (1 Læs rummer 3600 Tørv). Hvor store blev hans samlede Udgifter?

Disse Tørv sælger han til B for 52 Kr. pr. t (2400 Tørv vejer 1 t). Hvor meget maa B betale? Hvor mange pCt. tjener A?

1,8 t Tørv har samme Varmeevne som 1 t Kul, og 1 t Kul indeholder 13 hl. Hvor mange Penge vil B spare ved at brænde Tørv i Stedet for Kul, naar 1 hl Kul koster 12 Kr?

2. Den 5. Marts indsatte A 6500 Kr. i en Sparekasse, som giver $4\frac{1}{4}$ pCt. i aarlig Rente. Den 7. Juni samme Aar hævede A baade Kapital og Rente og anvendte en Del af Pengene til Køb af en Maskine, der kostede 19575 Mark.

Hvor stort var det Beløb, A hævede i Sparekassen? Hvor mange af Pengene var til Rest, da Maskinen var betalt?

100 Mark = 29,25 Kr.

Digitized by Google

Resultater.

1. 312 Kr.; 390 Kr.; 25 %; 1170 Kr.
2. 6570,60 Kr.; 844,91 Kr.

Matematik.

1. Konstruer en ligebenet Trekant, hvis Grundlinie er et givet Liniestykke a, og hvori Højden paa et af Benene er $\frac{4}{5} a$.

2. Et tocifret Tal er 4 Gange saa stort som sin Tværsum. Summen af Tallet og det Tal, der skrives med de samme Cifre i omvendt Orden, er 66. Find Tallet.

Resultater.

2. 24.

Løste Opgaver.

19. Bevis, at naar en Firkant ikke er et Parallelogram, er Summen af Sidernes Kvadrater større end Summen af Diagonalernes Kvadrater. N. F. Jensen.

Løsning:

I Firkanten $ABCD$ drages $CE \# AD$ og $AE \# DC$ og AC og ED skærer hinanden i F. Man har da ved Medianrelationen:

$$AB^2 + BC^2 = \tfrac{1}{2}AC^2 + 2BF^2, \qquad (1)$$
$$AD^2 + CD^2 = \tfrac{1}{2}AC^2 + 2FD^2 = \tfrac{1}{2}AC^2 + \tfrac{1}{2}ED^2 \qquad (2)$$
$$BE^2 + BD^2 = \tfrac{1}{2}ED^2 + 2BF^2. \qquad (3)$$

Adderes (1) og (2) og benyttes $2BF^2$ af (3), faas

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + BE^2,$$

hvormed Paastanden er bevist. A. M. Bunk.

20. Bevis, at i et Tetraeder er Summen af Kanternes Kvadrater fire Gange saa stor som Summen af Kvadraterne paa de tre Linier, der forbinder et Par modstaaende Kanters Midtpunkter. N. F. Jensen.

Løsning.

De tre Linier, der forbinder et Par modstaaende Kanters Midtpunkter, bliver to og to Diagonaler i et Parallelogram, hvis

Sider er halvt saa store som de Kanter i Tetraedret, der ikke skæres af Parallelogrammets Plan.

Opgavens Løsning fuldføres herefter uden Vanskelighed.

St.

21. Hvad er Betingelsen for, at Ligningen

$$(a_0 + ib_0)\,x^n + (a_1 + ib_1)\,x^{n-1} + \cdots + (a_n + ib_n) = 0$$

har p reelle Rødder? $p \leqq n$. **Halvor Nørregaard.**

Løsning:

Betingelsen bliver den, at Polynomierne

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \text{ og } b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$$

faar en største fælles Faktor af p'de Grad, og at denne Faktors Nulpunkter alle er reelle. V. Bredsdorff.

22. Idet $b \geqq x \geqq a$ og n og p er positive hele Tal, skal man bevise Formlen

$$\int_a^b (b-x)^n (x-a)^p dx = \frac{n}{p+1}\int_a^b (x-a)^{p+1}(b-x)^{n-1}dx$$

og derefter finde det første Integral. O. A. Smith.

Løsning:

Den søgte Formel finder man ved Anvendelse af delvis Integration. Integralets Værdi bliver dernæst

$$\frac{n(n-1)\cdots 1}{(p+1)(p+2)\cdots(p+n)} \cdot \frac{(b-a)^{p+n+1}}{p+n+1}.$$

V. Bredsdorff.

23. Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem paa hinanden vinkelrette Tangenter til Keglesnittet

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1.$$

O. A. Smith.

Løsning:

Af Keglesnittets Ligning finder man $\dfrac{dy}{dx} = \alpha = -\dfrac{Ax + By}{Bx + Cy}$ (1), og Ligningen for en Tangent med Røringspunkt (x_1, y_1) bliver $Axx_1 + Bxy_1 + Byx_1 + Cyy_1 = 1$ (2). Af (1) faas

$$y_1 = -\frac{A\alpha + \alpha B}{B + \alpha C}\,x_1,$$

der indsat i (2) giver

$$x_1 = \frac{B + \alpha C}{(B^2 - AC)(y - \alpha x)} \text{ og } y_1 = -\frac{A + \alpha B}{(B^2 - AC)(y - \alpha x)}.$$

Digitized by Google

Disse Værdier indsat i Keglesnittets Ligning giver Betingelsen for Eksistensen af α, naar (x, y) er et givet Punkt. Udtrykket reduceres (idet vi forudsætter $B^2 \neq AC$) til:

$$\alpha^2 [C - x^2 (AC - B^2)] + 2\alpha [B + xy (AC - B^2)] + A - y^2 (AC - B^2) = 0.$$

Det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem to paa hinanden vinkelrette Tangenter faas af $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$, altsaa:

$$\frac{A - y^2 (AC - B^2)}{C - x^2 (AC - B^2)} = -1 ; \quad x^2 + y^2 = \frac{A + C}{AC - B^2}$$

der fremstiller en Cirkel med Centrum i Begyndelsespunktet, og hvis Radius bestemmes ved

$$r^2 = \frac{A + C}{AC - B^2}.$$

Cirklen bliver reel, hvis $(A + C)(AC - B^2) \geq 0$.

V. Bredsdorff.

(Ogsaa løst af Margrethe Bie, Poul Holst, Ove Neergaard og K. Staack Petersen).

24. I et retvinklet Koordinatsystem har man givet Punkterne $A(a, 0)$ og $B(0, b)$. Find det geometriske Sted for Centrerne i de Keglesnit, der tangerer Koordinatakserne i A og B.

O. A. Smith.

Løsning:

Skal Keglesnittet $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ tangere Koordinatakserne i $(a, 0)$ og $(0, b)$, bliver Betingelserne derfor:

$$\left.\begin{aligned} Aa^2 + 2Da + F = 0; \quad D^2 = AF \\ Cb^2 + 2Eb + F = 0; \quad C^2 = CF \end{aligned}\right\} (1),$$

medens Centrums Koordinater (x, y) bestemmes ved Ligningerne

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + D = 0 \\ Bx + Cy + E = 0 \end{aligned}\right\} (2).$$

Sætter man $\frac{B}{F} = \alpha$, $\frac{D}{F} = \beta$ og $\frac{E}{F} = \gamma$, faar man af de foregaaende Ligninger:

$$(\beta a + 1)^2 = 0, (\gamma b + 1)^2 = 0 \text{ og } \beta^2 x + \alpha y + \beta = 0,$$
$$\gamma^2 y + \alpha x + \gamma = 0.$$

Heraf følger $\beta = -\frac{1}{a}$ og $\gamma = -\frac{1}{b}$, $\beta^2 x^2 + \beta x - \gamma^2 y^2 - \gamma y = 0$, hvilke Ligninger igen giver:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}, \text{ der spalter sig i } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ og } \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

Digitized by Google

Disse Ligninger fremstiller to rette Linier, hvoraf den første rette Linie er en Biløsning, den sidste det egentlige geometriske Sted.

St.

25. Idet $A = a + ib$ og $X = x + iy$ skal man bestemme de komplekse Værdier af X, for hvilke Brøken

$$\frac{A + iX}{A - iX}$$

bliver reel, og for hvilke Værdier, den bliver imaginær.

O. A. Smith.

Løsning:

Ligningen $\dfrac{a + ib + ix - y}{a + ib - ix + y} = k$, hvor a, b, x, y og k er reelle, deler sig i $a - y = k(a + y)$ og $b + x = k(b - x)$. Idet vi forudsætter $a + y \neq 0$ og $b - x \neq 0$, finder vi herved $\dfrac{x}{y} = -\dfrac{b}{a}$, saaledes at det geometriske Sted for X i den komplekse Talplan bliver en ret Linie gennem Begyndelsespunktet. Sætter man ovenfor ik i Stedet for k og udfører de tilsvarende Regninger, finder man $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Det geometriske Sted for X bliver en Cirkel.

V. Bredsdorff.

26. I en Trekant ABC kender man Siderne a, b og c. Find den spidse Vinkel, m_a danner med a. Eks. $A = 90^0$.

O. A. Smith.

Løsning:

Idet den søgte Vinkel kaldes v, har man:

$$\begin{aligned} b^2 &= m_a^2 + \frac{a^2}{4} - am_a \cos v \\ c^2 &= m_a^2 + \frac{a^2}{4} + am_a \cos v \end{aligned}, \quad \text{hvoraf} \quad \cos^2 v = \frac{(c^2 - b^2)^2}{a^2\left[2(b^2 + c^2) - a^2\right]}.$$

Er $\angle A = 90^0$, haves $b^2 + c^2 = a^2$, $\cos v = \cos 2B$ (forudsat $B \leq C$) eller $v = 2B$, et Resultat, der ogsaa let faas direkte af en Figur.

V. Bredsdorff.

(Ogsaa løst af Valdemar Simonsen, K. Staack-Petersen, Margrete Bie og L. T. Wang.)

27. Skriv paa logaritmisk Form

$$\sin nA + \sin nB + \sin nC,$$

naar A, B og C er Vinklerne i en Trekant og n et positivt helt Tal. Eks. $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

O. A. Smith.

Løsning:

Udtrykket omformes til

Digitized by Google

$$2 \sin \frac{n}{2}(A+B) \cos \frac{n}{2}(A-B) + 2 \sin \frac{n}{2} C \cos \frac{n}{2} C,$$

hvori $A+B$ erstattes med $\pi - C$; $\sin \frac{n}{2}(A+B)$ vil da ved sædvanlig Reduktion blive lig en af Faktorerne i sidste Led; udskilles denne, og sammendrages atter paa vanlig Maade, faas

$$\sin nA + \sin nB + \sin nC = \begin{cases} \pm 4 \cos \frac{nA}{2} \cos \frac{nB}{2} \cos \frac{nC}{2} \\ \pm 4 \sin \frac{nA}{2} \sin \frac{nB}{2} \sin \frac{nC}{2}, \end{cases}$$

eftersom n har Formerne $4p+1$, $4p+3$, $4p+2$ og $4p$.

I Eksemplerne faas

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = -4 \cos \frac{3A}{2} \cos \frac{3B}{2} \cos \frac{3C}{2}.$$

A. M. Bunk.

(Ogsaa løst af V. Bredsdorff.)

28. En vilkaarlig Tangent til Kurven $y = x^4 + x^2 - 1$ skærer denne i Punkterne M og P. Find det geometriske Sted for Midtpunktet MP.

O. A. Smith.

Løsning:

Ligningen for en Tangent til Kurven bliver

$$y = x(4x_1^3 + 2x_1) - 3x_1^4 - x_1^2 - 1,$$

idet x_1 er Abscissen til Røringspunktet. Tangentens Skæringspunkter med Kurven bestemmes ved Ligningen

$$x^4 + x^2 - x(4x_1^3 + 2x_1) + 3x_1^4 + x_1^2 = 0,$$

der har Dobbeltroden $x = x_1$, medens de to andre Rødder findes i Ligningen

$$x^2 + 2xx_1 + 3x_1^2 + 1 = 0.$$

Man ser, at Tangenterne til Kurven i dens reelle Punkter har imaginære Skæringspunkter med Kurven. Er Koordinaterne til Midtpunktet af MP (x, y) haves altsaa: $x = -x_1$, hvorefter Ligningen for det søgte geometriske Sted bliver

$$y = -7x^4 - 3x^2 - 1.$$

V. Bredsdorff.

29. Løs Ligningerne

$$\sin x = tg y, \quad \cos y = tg x.$$

O. A. Smit

Digitized by Google

Løsning.

Man finder

$$tgx \sin x = \sin y,\quad tgx = \cos y,$$

hvoraf

$$tg^2x(1 + \sin^2 x) = 1$$

eller

$$\sin^4 x + 2\sin^2 x - 1 = 0,$$

der giver

$$\sin^2 x = -1 + \sqrt{2}.$$

Altsaa haves:

$$2\log\sin x = 2\log tgy = \log(\sqrt{2} - 1).$$

I de fire første Kvadranter faar man Værdisættene

$$x = 40^0\, 3',6,\ y = 32^0\, 45',9$$

samt

$$x = 139^0\, 56'4,\ y = 212^0\, 45'9.$$

V. Bredsdorff.

(Løsning indsendt af Ove Neergaard og L. T. Wang).

30. Paa en vilkaarlig Trekants Sider a, b og c tegnes Kvadrater, som falder udenfor Trekanten. Disse Kvadraters ydre Vinkelspidser forbindes med de rette Linier a_1, b_1, c_1, saaledes at disse ikke skærer Kvadraterne. Derefter tegnes Kvadrater paa a_1, b_1, og c_1, som ligeledes falder udenfor Figuren, og disses ydre Vinkelspidser forbindes ved Linierne a_2, b_2, c_2 paa samme Maade som før.

1^0. Bevis, at

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$
$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 16(a^2 + b^2 + c^2).$$

2^0. Hvilken Egenskab har de mellem Kvadraterne beliggende Trapezer?

Løsning.

Man har: $a_1^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$ og de analoge, medens tillige $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$. Herved finder man $a_1^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$. Ved Addition af denne og de analoge Ligninger giver det

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

hvilket skulde bevises.

Lad Kvadratet over Siden b have Vinkelspidserne A, A_1, C_1, C i den nævnte Orden og de andre Endepunkter for a_1 og c_1 være henholdsvis A_2 og C_2. Lad endvidere Kvadraterne over Liniestykkerne a_1 og c_1 hedde $A_1A_2A_3A_4$ og $C_1C_2C_3C_4$. For nu at bevise, at Firkant $A_1C_1C_4A_4$ er et Trapez, vil vi søge Længden af Projektionen af A_1A_4 paa AA_1's Forlængelse. Vi sætter $\angle AA_1A_2 = v$. Den søgte Projektion bliver $a_1 \sin v$, men af $\triangle AA_1A_2$ finder man $a_1 \sin v = c\sin A = h_b$. Da Projektionen af C_1C_4 paa CC_1's Forlængelse er lige saa stor, bliver Firkant $A_1C_1C_4A_4$ altsaa et Trapez med Højden h_b.

Digitized by Google

Længden af $b_2 = A_4C_4$ bliver $a_1 \cos v + b + c_1 \cos u$, hvor $\angle CC_1C_2 = u$. Benytter vi nu Formlen $\cos v = \frac{a_1^2 + b^2 - c^2}{2a_1 b}$ og den analoge samt de ovenfor fundne Udtryk for a_1^2 og c_1^2, finder vi $b_2 = 4b$. Heraf følger naturligvis, at $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 16(a^2 + b^2 + c^2)$. Men vi har altsaa yderligere bevist, at Forholdet mellem de parallele Sider i ethvert af Trapezerne bliver 1 : 4.

Arealet af Trapez $A_1C_1C_4A_4$ bliver $\frac{1}{2} h_b \cdot 5b = 5T$, hvor T er den givne Trekants Areal. Alle Trapezernes Arealer er da lige store.

Valdemar Simonsen.

(Løsning indsendt af L. T. Wang).

31. I en Division er Dividenden et femcifret Tal, Kvotienten 16 større end Divisor og Divisor 55 større end Resten. Bestem: 1° den mindst mulige Værdi af Dividenden og 2° Værdien af Cifret t, naar Dividenden er $58t79$.

Løsning:

Af Ligningen $D = d(d+16) + (d-55)$ eller $D + 55 = d^2 + 17d$, hvor D og d er positive hele Tal, finder man uden Vanskelighed, at Dividendens mindste Værdi er 10175, medens det søgte Ciffer bliver $t = 6$.

Valdemar Simonsen.

(Ogsaa løst af Ove Neergaard).

32. Idet $c_0, c_1, c_2 \cdots c_n$ er Koefficienterne til Leddene i $(1+x)^n$ udviklet efter Binomialformlen, skal man vise, at

$$c_0 - \tfrac{1}{2}c_1 + \tfrac{1}{3}c_2 \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}c_n = \frac{1}{n+1}.$$

Løsning:

Summen paa venstre Side af Lighedstegnet er

$$1 - \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{3}\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} - \tfrac{1}{4}\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[n+1 - \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} - \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left[1 - (n+1) + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}(1-1)^{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

33. Til en Trekants indskrevne Cirkel lægges Tangenter parallele med Siderne a, b og c. Find Forholdet mellem Arealerne af den fremkomne Sekskant og den givne Trekant.

G. M. Stensig.

Løsning:

I den fremkomne Sekskant er de modstaaende Sider to og to lige store; dette indses let, naar man bemærker, at den Trekant, der dannes af de tre Tangenter, har sine Sider parallele med Siderne i den givne Trekant og bliver kongruent med denne, da de to Trekanter har samme indskrevne Cirkel. De Stykker, der paa Tangenterne afskæres af den givne Trekants Sider, kaldes x, y og z.

For det søgte Forhold haves da:

$$\frac{S}{T} = \frac{2(x+y+z)}{a+b+c}. \quad (1)$$

Ved ensvinklede Trekanter findes imidlertid

$$x = \frac{(h_a - 2r)\,a}{h_a}$$

og de analoge Udtryk. Erindrer vi nu, at $T = \frac{1}{2} a h_a = rs$, finder vi dernæst:

$$x + y + z = \frac{(h_a - 2r)\,a^2}{2T} + \cdots = \frac{2r(s-a)\,a}{2rs} + \cdots.$$

Ved Anvendelse af (1) faar vi dernæst:

$$\frac{S}{T} = \frac{a(s-a) + b(s-b) + c(s-c)}{s^2}.$$

Valdemar Simonsen.

(Løsning indsendt af L. T. Wang.)

34. Man har givet en Cirkel og i denne en Periferivinkel. Konstruer en Cirkel, der rører Vinklens Ben og den givne Cirkel. G. M. Stensig.

Løsning:

Opgaven er en simpel Anvendelse af Læren om Inversion, idet Vinklens Toppunkt vælges til Inversionscentrum. To Løsninger.

35. Forholdet mellem Benet og Grundlinien i en ligebenet Trekant er m $(m > 1)$. Bestem Værdien af Forholdet mellem de Arealer, hvori den vinkelrette paa Midten af et af Benene deler Trekanten. G. M. Stensig.

Løsning:

Lad Trekanten være ABC, saaledes at $AC = b$, $AB = CB = mb$, medens vi kalder den halve Toppunktsvinkel v. Man faar da

$$\frac{\triangle DBE}{\triangle ABC} = \frac{1 \cdot mb : \cos 2v}{2 \cdot mb \cdot 2} = \frac{1}{4 \cos 2v},$$

Digitized by Google

men
$$\cos 2v = 1 - 2\sin^2 v = 1 - \frac{1}{2m^2}.$$

Det søgte Forhold bliver dernæst $\dfrac{m^2}{3m^2 - 2}$.

Ellen Margrethe Bie.

(Ogsaa løst af Poul Holst, Valdemar Simonsen og L. T. Wang.)

36. Løs Ligningerne

$$x^2 + y^2 - 2ax + 2by = 0$$
$$xy + bx - ay = 2ab$$

og giv en grafisk Fremstilling af de ved Ligningerne definerede Kurver.

G. M. Stensig.

Løsning:

Multipliceres den sidste Ligning med 2 og adderes den til den første, faar man: $(x+y)^2 + (2b - 2a)(x+y) - 4ab = 0$ eller $x+y = \begin{cases} 2a \\ -2b \end{cases}$. Herefter løser man uden Vanskelighed de givne Ligninger og finder Værdisættene

$$x = 2a,\ y = 0;\ x = a + b,\ y = a - b;\ x = 0,\ y = -2b;$$
$$x = a - b,\ y = -a - b.$$

Ligningerne fremstiller henholdsvis en Cirkel og en ligesidet Hyperbel, begge med Centrum i $(a, -b)$.

Valdemar Simonsen.

(Ogsaa løst af K. S. Petersen, Ellen Margrethe Bie.)

37. Lad i Trekant ABC D være Endepunktet for m_a. Find Radierne i de i Trekanterne ADB og ADC indskrevne Cirkler udtrykt ved k, b og c, hvor $k = m_a + \dfrac{a}{2}$.

G. M. Stensig.

Løsning:

Lad Perimeteren af $\triangle ADB$ være $2s_1$, Radius i den indskrevne Cirkel r_1, medens de tilsvarende Størrelser for $\triangle ADC$ være $2s_2$ og r_2. Da Trekanterne ADB og ADC har samme Areal, haves $r_1 s_1 = r_2 s_2$ eller $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{k+b}{k+c}$. Forbinder man D med de to Centrer for Cirklerne og tegner Radier til Røringspunkterne med a, faar man af ensvinklede Trekanter: $r_1 \cdot r_2 = \frac{1}{4}(k-b)(k-c)$ da $s_1 = \dfrac{k+c}{2}$ og $s_2 = \dfrac{k+b}{2}$. Herved finder man dernæst:

$$r_1 = \frac{1}{2(k+c)}\sqrt{(k^2-b^2)(k^2-c^2)}\quad r_2 = \frac{1}{2(k+b)}\sqrt{(k^2-b^2)(k^2-c^2)}.$$

Valdemar Simonsen.

(Ogsaa løst af P. Holst og M. Bie.)

Digitized by Google

38*). Find et helt Tal, der er en Primtalspotens, saaledes beskaffent, at Summen af Kvadraterne af dets alikvote Dele bliver 2451.

Løsning:

Lad Tallet være p^n, hvor p er et Primtal. Man faar da, idet de alikvote Dele i p^n bliver Tallene $1, p, p^2, \cdots, p^{n-1}$:

$$1^2 + p^2 + p^4 + \cdots + p^{2(n-1)} = 2451$$

eller ved Summation af Kvotientrækken og en let Omformning

$$2450 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = p^2 (2451 - p^{2n-2}).$$

Herefter er der kun Mulighederne $p = 5$ eller $p = 7$. Den første giver ingen Løsning, derimod har Tallet $7^3 = 343$ den forlangte Egenskab.

Vilhelm Pedersen.

39. Find Maksimum og Minimum af Funktionen

$$31 \cos(x + a) - 13 \cos(x + b),$$

hvor de spidse Vinkler a og b er definerede ved $\cos a = \frac{3}{5}$, $\cos b = \frac{12}{13}$. Grafisk Fremstilling.

Løsning:

Man har $\sin a = \frac{4}{5}$, $\sin b = \frac{5}{13}$, hvorefter ovenstaaende Udtryk ved Anvendelse af Additionsformlerne lader sig skrive som $f(x) = \frac{33}{5}(\cos x - 3 \sin x)$. Definerer vi nu den spidse Vinkel c ved Ligningen $tg\,c = 3$, faar vi $f(x) = \frac{33\sqrt{10}}{5} \cos(x + c)$. Funktionen antager sin Maksimumsværdi for $x = p \cdot 360^0 - c$, $f(x) = \frac{33\sqrt{10}}{5}$, sin Minimumsværdi for $x = p \cdot 360^0 + 180^0 - c$, $f(x) = -\frac{33\sqrt{10}}{5}$, idet $c = 71^0\, 33',08$. Den tilsvarende Kurve er en sædvanlig Bølgekurve.

Opgaver til Løsning.

51. Kong Ladodos I havde ladet bygge en Søjle med kvadratisk Tværsnit, og der var brugt mere end baade et og to Tusinde Sten. Hver Sten var en Alen lang, en Alen høj og en Alen bred. Paa den Tid, Kong Ladodos II levede, var de yderste Sten forvitrede, og Kongen gav Befaling til, at

*) Trykfejl i den stillede Opgaves Tekst.

Digitized by Google

man skulde tage disse Sten bort og af dem bygge en ny Søjle. Nu staar der to ens Søjler til Minde om Ladodos II. Hvor mange Sten var der i den første Søjle?

(Wiskundige Opgaven).

52. Naar man har udviklet Størrelsen $(x+y+z)^n$, erstatter man alle Koefficienter med Tallet 1. Find Værdien af det fremkomne Udtryk.

53. Vis, at der blandt de paa hinanden følgende hele Tal

$$n+1, \quad n+2, \quad \cdots, \quad n+m$$

findes lige saa mange Multipla af et vilkaarligt helt Tal p som blandt Tallene

$$1, \ 2, \ 3, \ \cdots \ m.$$

54. Løs Ligningerne

$$+\sqrt{x+7} \pm \sqrt{x+5} \pm \sqrt{x+3} \pm \sqrt{x+2} = 0$$

og bestem den Ligning, der tilfredsstilles af den fundne Rod.

55. I den retvinklede Trekant ABC ($\angle C\, 90^0$) er

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2} = m.$$

Dan en Ligning af anden Grad med Rødderne $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ og $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ og diskuter denne Ligning. Find dernæst, udtrykt ved m, Værdien af Produkterne

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \quad \text{og} \quad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \quad \text{og af Brøken} \quad \frac{a+b-c}{a+b+c}.$$

56. Find paa et regulært Dodekaeders Overflade den korteste Vej fra en Hjørnespids i en Sideflade til en af de to Hjørnespidser i den modstaaende Sideflade, hvortil Kantvejen er $3a$.

(Halvor Nørregaard).

57. Vis, at

$$\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{x+p} - \sum_{p=1}^{p=n}\frac{p}{(x+p-1)(x+p)} = \frac{n+1}{n+x},$$

samt at

Digitized by Google

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{x+p} - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{p}{(x+p-1)(x+p)} = 1.$$

(O. A. Smith.)

58. Bevis Rigtigheden af følgende Relationer, hvori

$$s = x + y + z.$$

1. $\sin 3(x+y)\sin(x-y) + \sin 3(y+z)\sin(y-z)$
$+ \sin 3(z+x)\sin(z-x) = 4\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)\sin 2s$

2. $\sin 4(x+y)\sin 2(x-y) + \sin 4(y+z)\sin 2(y-z)$
$+ \sin 4(z+x)\sin 2(z-x) = 4\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)$
$[4\sin(3s-x)\sin(3s-y)\sin(3s-z) + \sin 8s]$.

3. $\sin 5(x+y)\sin(x-y) + \sin 5(y+z)\sin(y-z)$
$+ \sin 5(z+x)\sin(z-x) = 4\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)$
$[4\sin(3s+x)\sin(3s+y)\sin(3s+z) + \sin 10s]$.

4. $\sin 6(x+y)\cos 3(x-y)\sin(x-y)$
$+ \sin 6(y+z)\cos 3(y-z)\sin(y-z) + \sin 6(z+x)\cos 3(z-x)\sin(z-x)$
$= 4\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)[2\sin(5s-3x)\sin(5s-3y)\sin(5s-3z)$
$+ \cos 8s \cdot \sin 4s]$.

5. $\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x) + \sin(x-y)\sin(y+z)\sin(z+x)$
$+ \sin(x+y)\sin(y-z)\sin(z+x) + \sin(x+y)\sin(y+z)\sin(z-x) = 0.$

6. $\sin x \sin y \sin 2(x+y)\sin(x-y) + \sin y \sin z \sin 2(y+z)\sin(y-z)$
$+ \sin z \sin x \sin 2(z+x)\sin(z-x)$
$= -\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)\sin 2s.$

7. $2\cos x\cos y\cos z\cos s - \cos(s+x)\cos(s+y)\cos(s+z) -$
$\cos(s-x)\cos(s-y)\cos(s-z) = \frac{1}{2}\sin^2 2s.$

8. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2\cos x\cos y\cos z - 1$
$$= 4\cos\frac{s}{2}\cos\left(\frac{s}{2} - x\right)\cos\left(\frac{s}{2} - y\right)\cos\left(\frac{s}{2} - z\right).$$

9. $\operatorname{tg}(x-y)\operatorname{tg}(y-z)\operatorname{tg}(z-x) + \operatorname{tg}(x-y)\operatorname{tg}(y+z)\operatorname{tg}(z+x)$
$\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(y-z)\operatorname{tg}(z+x) + \operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(y+z)\operatorname{tg}(z-x) = 0.$

10. $\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y) + \operatorname{tg}(y+z)\operatorname{tg}(y-z) + \operatorname{tg}(z+x)\operatorname{tg}(z-x) =$
$- \operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y)\operatorname{tg}(y+z)\operatorname{tg}(y-z)\operatorname{tg}(z+x)\operatorname{tg}(z-x).$

11. $$\begin{vmatrix} \sin x & \sin(2x-y) & \sin(2x-z) \\ \sin(2y-x) & \sin y & \sin(2y-z) \\ \sin(2z-x) & \sin(2z-y) & \sin z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sin s & \sin(y+2z) & \sin(2z+x) \\ \sin(2x+y) & \sin s & \sin(z+2x) \\ \sin(x+2y) & \sin(2y+z) & \sin s \end{vmatrix}$$
$= 0.$

(H. Paulli).

Opgaver til Undervisningsbrug.

76. I et Trapez er de parallele Sider a og b, idet $a > b$. x og y er Vinklerne ved a og h Trapezets Højde. Bevis, at

$$h = (a - b)\frac{\sin x \sin y}{\sin(x+y)}.$$

77. v_A, v_B, v_C er Halveringslinierne til Vinklerne i $\triangle ABC$. Bevis at

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{v_A} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{v_B} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{v_C}.$$

78. w_A, w_B, w_C er Afstandene fra en Trekants Vinkelspidser til den indskrevne Cirkels Centrum. Bevis, at

$$w_A = \frac{bc}{s}\cos\frac{A}{2} = \frac{a \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}.$$

Bevis tillige, at

$$w_A \cdot w_B \cdot w_C = \frac{abcr}{s},$$

naar r er Radius i Trekantens indskrevne Cirkel.

79. Bevis, at man med de samme Betegnelser som ovenfor, i enhver Trekant har

$$\frac{w_A}{v_A} + \frac{w_B}{v_B} + \frac{w_C}{v_C} = 2.$$

80. Bevis, at man i enhver Trekant har

$$a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c) \quad \text{eller} \quad a = \frac{\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}}{\sqrt{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}}}.$$

81. Find Siderne i en Trekant udtrykt ved p, q og t, naar

$$rr_a = p \qquad rr_b = q \qquad rr_c = t.$$

Benyt de Formler, som udtrykker Radierne ved Siderne og Perimetren.

82. I en omskreven Firkant $ABCD$ er $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ og Cirklens Radius r. Bevis, at

$$a = r \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B}.$$

Bevis tillige, at

$$\frac{\sin \frac{1}{2} A}{\sqrt{bc}} = \frac{\sin \frac{1}{2} C}{\sqrt{ad}} \quad \text{og at} \quad \frac{\sin \frac{1}{2} B}{\sqrt{cd}} = \frac{\sin \frac{1}{2} D}{\sqrt{ab}}.$$

83. Bevis, at Arealet af en omskrivelig Firkant er

$$r^2 \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A + C) \sin \frac{1}{2}(B + C)}{\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} D}.$$

84. Idet r_a er Radius i den Cirkel, som rører Siden a og de to tilstødende Siders Forlængelse i en omskreven Firkant, skal man bevise, at

$$r_a = r \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \quad \text{og} \quad r_a \cdot r_c = r_b \cdot r_d.$$

85. En Firkant er baade indskrivelig og omskrivelig. Bevis, at

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \cot \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{bc}{ad}} \quad \text{og} \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \cot \frac{C}{2} \sqrt{\frac{cd}{ab}}.$$

Bevis tillige ved at benytte Sætningen om en omskreven Polygons Areal, at Firkantens Areal er $\sqrt{abcd}$.

(76—85 af Povl Jørgensen.)

86. Find Ligningerne for Tangenterne til Cirklen $x^2 + y^2 = 85$ i de Punkter, der har Abscissen 9.

Find derefter Ligningerne for Tangenterne i Punkterne $(x_1 = 6, y_1 > 0)$ og $(x_1 = 7, y_1 < 0)$, bestem Vinklen mellem disse to Tangenter, og Ligningerne for de Linier, der halverer Vinklerne imellem dem.

87. Find Ligningen for en Cirkel, der gaar gennem Begyndelsespunktet og gennem Skæringspunkterne for Cirklen $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 6$ og den rette Linie $2x + 3y = 2$.

Digitized by Google

Studenterforeningens Bibliotek

Find derefter Ligningerne for de to Cirklers Centerlinie, og bestem dens Afstand fra Begyndelsespunktet.

88. Løs Ligningen

$$\sin 2x = k \cdot \operatorname{tg} x$$

89. I de elementære analytiske Plangeometrier, som sædvanlig anvendes i Gymnasierne, har man fundet $y^2 = px$ og $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ som de Ligninger, der henholdsvis tilfredsstilles af et Punkt, der har samme Afstand fra $\left(\frac{p}{4}, 0\right)$ og $\left(x + \frac{b}{4} = 0\right)$ (Parablen), eller hvis Afstande fra $(-ea, 0)$ og $(ea, 0)$ har en given Sum (Ellipsen), en given Differens (Hyperblen). Bevis omvendt, at ethvert Punkt, hvis Koordinater tilfredsstiller de nævnte Ligninger, ogsaa opfylder de ovenfor nævnte Betingelser.
(Halvor Nørregaard).

OPGAVER FOR GYMNASIEELEVER

og for Elever paa Seminarier og Adgangshold til Polyteknisk Læreanstalt.

1. Bevis, at $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$, hvor a, b og c er vilkaarlige, positive eller negative, Tal. Hvilke og hvor mange af Leddene paa højre Side af Lighedstegnet kan være negative? π.

2. Opløs følgende flerleddede Størrelser i Faktorer:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2xz,$$
$$4p^2 + 9q^2 + r^2 + 12pq - 6qr - 4pr,$$
$$m^2 + 9n^2 + s^2 + 6mn + 6ns + 2ms - 9p^2,$$
$$-7a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 12ab + 8bc - 12ac.$$

π.

3. Løs Ligningerne:

$$25x^2 + 9y^2 + z^2 - 30xy - 6yz + 10xz + 185x - 111y + 37z + 286 = 0,$$
$$2x + 3y - 5z = 10,$$
$$2x - y + 3z = 2.$$

π.

4. En Kone gaar til Torvs med Æg. Til den første Kunde sælger hun Halvdelen af sine Æg plus et halvt Æg, til den

Digitized by Google

næste Halvdelen af Resten plus et halvt Æg o. s. fr. Efter at have handlet med n Personer har hun solgt alle sine Æg. Hvor mange Æg havde hun oprindelig? x.

5. To Troppeafdelinger er opstillet saaledes, at hver Afdeling har lige saa mange Geledder, som der findes Soldater i hvert Geled og begge Afdelinger har tilsammen 84 Geledder. Senere foretages Opstillingen saaledes, at hver Afdeling har lige saa mange Soldater i hvert Geled, som den anden havde i hvert Geled ved den første Opstilling; derved bliver det samlede Antal Geledder 91. Hvor stærk er hver Troppeafdeling? x.

6. En Fader bestemmer i sit Testamente, at hans Formue skal deles mellem hans Børn paa følgende Maade: Den ældste skal have a Kr. og $\frac{1}{n}$ af Resten, den næstældste skal have $2a$ Kr. og $\frac{1}{n}$ af, hvad der nu er tilbage o. s. v. Denne Fordeling viser imidlertid, at alle Børnene faar lige meget. Find Størrelsen af Formuen, Antallet af Børn og hvert Barns Arvelod.

Eks.: $a = 50000$ Kr. $n = 5$. x.

7. En Stabel Kugler er opbygget paa følgende Maade: Nederste Lag danner et Rektangel med m Kugler paa den ene Led, n paa den anden; ovenpaa dette Lag ligger et andet, der har $m - 1$ Kugler paa den ene Led, $n - 1$ paa den anden o. s. fr., indtil øverste Lag, der er en enkelt Række med $m - (n - 1)$ Kugler. Hvor mange Kugler er der i Stabelen? x.

8. Vis, at naar man for et Trapez har Arealet $T = \frac{1}{2}\frac{h}{2}\cdot p$, hvor h er Højden, p Perimeteren, da er Trapezet omskrivelig om en Cirkel med Radius $\frac{h}{2}$. (Halvor Nørregaard).

9. Konstruer en Trekant af de tre Højder.

10. Vis, hvorledes den bekendte Formel for Løsningen af Andengradsligningen $x^2 + ax + b = 0$ fremkommer, naar man indfører en ny ubekendt y, idet x sættes lig med $y - \frac{a}{2}$. π.

Digitized by Google

11. Vis, hvorledes Trediegradsligningen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ kan reduceres til en ny Trediegradsligning, der ikke indeholder den ubekendte i andre Potenser end 1ste og 3dle, ved at man indfører en ny ubekendt. *π.*

12. Find en Rod i Ligningen

$$2x^3 + 12x^2 + 24x + 37 = 0$$

og gør Prøve *π.*

13. Find x af Ligningen

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} + \sqrt{x+c} = 0.$$

x.

14. Vis, at Tyngdepunktet for Trekanten ABC's Perimeter bestemmes ved Vinkelhalveringslinierne i den Trekant, hvis Vinkelspidser er Midtpunkterne af Siderne i Trekant ABC.

x.

15. Vis, at Inertimomentet af en homogen rektangulær Skive med Siderne a og b med Hensyn til en Akse gennem Tyngdepunktet parallel med Siden b er $\frac{1}{12}ma^2$, idet m betegner Skivens Masse. Vis derefter, at Skivens Inertimoment med Hensyn til en Akse gennem Tyngdepunktet vinkelret paa Skivens Plan er $\frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$.

Prisopgave

stillet af Rektor, Dr. phil. S. A. Christensen.

16. Vis, at Løsningen i hele Tal af Ligningen $2x^2 - y^2 = \pm 1$ kan anvendes til at bestemme Tilnærmelsesværdier for $\sqrt{2}$ og angiv Fejlgrænserne.

Bestem de laveste 10 Par sammenhørende Værdier af x og y og de tilsvarende Tilnærmelsesværdier for $\sqrt{2}$.

* * *

For de tre bedste Løsninger udsættes følgende Præmier:

Første Aargang af Matematisk Tidsskrift A.

J. Hjelmslev: Geometriske Eksperimenter.

Løsningen af Prisopgaven maa være Redaktionen i Hænde senest 1. August d. A.

Digitized by Google

Mere om et indsendt Spørgsmaal.

(Se Aargang 1919 Hefte 3. Pag. 116).

Da Redaktionens Svar paa det indsendte Spørgsmaal i Matem. Tidsskrift A S. 116 forudsætter Kendskab til et Keglesnits Bestemmelse ved den almindelige 2den Grads Ligning, vil jeg nedenfor vise, hvorledes en flink Gymnasieelev uden et saadant Kendskab vilde kunne besvare Spørgsmaalet.

Dersom de positive Retninger paa Normalen og de to Linier betegnes ved henh. N, L_1 og L_2, er Vinklens Halvering udtrykt ved $\overline{L_1 N} = \overline{N L_2}$, hvoraf

$$L_1X + XN = NX + XL_2,$$

altsaa

$$2XN = NL_1 + XL_2,$$

og heraf faas, idet de to Liniers Hældningskoefficienter betegnes ved h_1 og h_2,

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,XN}{1 - \mathrm{tg}\,XN} = \frac{h_1 + h_2}{1 - h_1 h_2}.$$

Hvis Parablens Ligning er $py = x^2$, og det givne Parabelpunkt er $\left(a, \frac{a^2}{p}\right)$, er tg $XN = -\frac{p}{2a}$, altsaa

$$\frac{h_1 + h_2}{1 - h_1 h_2} = \frac{4ap}{p^2 - 4a^2}. \qquad (1)$$

Da Linien L_1 er bestemt ved

$$y - \frac{a^2}{p} = h_1 (x - a),$$

bliver dens 2det Skæringspunkt P_1 med Parablen

$$\left(ph_1 - a,\ \frac{(ph_1 - a)^2}{p}\right);$$

ved Ombytning af h_1 med h_2 faas Linien L_2's 2det Skæringspunkt P_2 med Parablen

$$\left(ph_2 - a,\ \frac{(ph_2 - a)^2}{p}\right).$$

Digitized by Google

og Ligningen for Linien P_1P_2 findes at være

$$2ax + py + a^2 = p(h_1 + h_2)(x + a) + p^2h_1h_2$$

eller

$$2ax + py + a^2 + p^2 = p(h_1 + h_2)(x + a) + p^2(1 - h_1h_2) \quad (2).$$

Af (1) faas

$$\frac{h_1 + h_2}{4ap} = \frac{1 - h_1h_2}{p^2 - 4a^2} = k,$$

og altsaa kan (2) omskrives saaledes:

$$2ax + py + a^2 + p^2 = kp^2(4ax + p^2),$$

der bestemmer et Liniebundt med Toppunktet i Skæringspunktet mellem de faste Linier

$$2ax + py + a^2 + p^2 = 0 \quad \text{og} \quad 4ax + p^2 = 0.$$

Trækkes disse Ligninger fra hinanden, faas

$$2ax = py + a^2,$$

der bestemmer Tangenten, der altsaa ogsaa hører til Bundtet.

C. K.

Prisopgaver for 1920.

Matematisk Tidsskrift bringer i Aar tre Prisopgaver. De to første af dem er stillet af Professor H. Bohr. Den tredje, som er stillet af Professor J. Hjelmslev, er den samme, som blev givet som Prisopgave II i 1919.

I.

I Rummet er fastlagt et retvinklet Koordinatsystem xyz, og der er givet en Samling S af Punkterne $P: (x, y, z)$, som opfylder følgende to Betingelser:

1) Er $P_1: (x_1, y_1, z_1)$ og $P_2: (x_2, y_2, z_2)$ to vilkaarlige (ens eller forskellige) Punkter i Samlingen S, da skal deres »Differens«, d. v. s. Punktet $Q: (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ ligeledes tilhøre S, og

2) Der findes et Punkt $P_0:(x_0, y_0, z_0)$ i Samlingen S og et positivt Tal r, saaledes at der indenfor Kuglefladen med Centrum i P_0 og Radius r ikke findes andre Punkter i S end P_0 selv.

Man skal undersøge Punktsamlingens Beskaffenhed og give en Oversigt over de forskellige Muligheder, der kan indtræffe.

II.

Find (f. Eks. i Tilknytning til Opgave I) den fuldstændige Løsning til den ubestemte Ligning

$$ax + by + cz = d,$$

hvor a, b og c er givne hele Tal, medens de ubekendte x, y og z ligeledes er hele Tal.

Løs endvidere de to sammenhørende ubestemte Ligninger

$$ax + by + cz = d$$

og

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1.$$

I begge Tilfælde skal gives en fuldstændig Diskussion af de forskellige Muligheder.

III.

De fire Kongruenssætninger og deres systematiske Betydning i nyere og ældre Lærebøger i Plangeometri.

Ved Besvarelsen af denne Opgave lægges Vægt paa en klar og overskuelig Fremstilling. Særligt Hensyn tages til Euklids Elementer, Legendre's Geometri og de vigtigste danske Lærebøger. Angaaende Emnets historiske Side kan henvises til *J. Tropfke:* Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Leipzig 1903.

* * *

Der udsættes for hver især af de tre Opgaver følgende Præmier for de bedste Besvarelser:

1. Præmie: Nyt Tidsskrift for Matematik 1890—1918*).
2. Præmie: *J. Hjelmslev:* Lærebog i Geometri.
3. Præmie: *Niels Nielsen:* Elementær Talteori.
4. Præmie: *J. Hjelmslev:* Geometriske Eksperimenter.

Besvarelser maa være indsendt i forseglet Konvolut til Redaktionen inden 1. Januar 1921. Kun Abonnenter paa Tidsskriftet kan deltage i Konkurrencen.

*) I de første Aargange mangler enkelte Hefter.

Digitized by Google

Decimalbrøker med lige Periodetal.

Af B. P. Bertelsen.

En ren periodisk Decimalbrøk med n Cifre i Perioden, siges at have Periodetallet »n«.

Forvandlingen af $1 : p$ til Decimalbrøk sker efter følgende Skema:

Dividend.	Kvotient.	Rest.
10	a_1	$r_1 = 10 - p \cdot a_1$
$10^2 - pa_1 \cdot 10$	a_2	$r_2 = 10^2 - p[a_1 \cdot 10 + a_2]$
$10^3 - p(a_1 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10)$	a_3	$r_3 = 10^3 - p[a_1 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10 + a_3]$;

o. s. v.

Man har derfor:

$$r_{2m} = 10^{2m} - p\left[a_1 \cdot 10^{2m-1} + a_2 \cdot 10^{2m-2} + \cdots a_{2m}\right] \qquad (\alpha)$$

Hvis r_{2m} er lig med 1 og ingen forudgaaende Rest er lig 1, da giver $1 : p$ tydeligvis en ren periodisk Decimalbrøk med Periodetallet $2m$, men ogsaa kun naar disse Betingelser er opfyldt.

Restrækken ses at være den samme som Restrækken for $10, 10^2, \cdots 10^{2m}$.

$r_{2m} = 1$ giver da: $10^{2m} - 1 = kp$ eller p primisk med 10. Endvidere faar man den kendte Sætning ved i (α) at sætte $r_{2m} = 1$ og løse Ligningen med Hensyn til $1 : p$:

$$\frac{1}{p} = \frac{a_1 \cdot 10^{2m-1} + a_2 \cdot 10^{2m-2} + \cdots a_{2m}}{10^{2m} - 1} = \frac{\text{Perioden}}{99 \cdots 999}.$$

Heraf ser man, at p maa være Faktor i

$$10^{2m} - 1 = (10^m - 1)(10^m + 1).$$

Hvis Periodetallet skal være $2m$, kan p ikke gaa op i $10^m - 1$, thi da blev Periodetallet m eller derunder. For at finde de Værdier af p, for hvilke $1 : p$ giver en ren periodisk Decimalbrøk med Periodetallet $2m$, behøver man derfor kun at betragte Tal, der enten udelukkende er Faktorer i $10^m + 1$ eller bestaar af Faktorer dels fra $10^m + 1$, dels fra $10^m - 1$. Eks:

$$2m = 4; \quad 10^4 - 1 = (10^2 - 1)(10^2 + 1) = (3 \cdot 3 \cdot 11) \cdot 101.$$

Digitized by Google

Skal Periodetallet være 4, kan p altsaa ikke være: 3, 9, 11, 33 eller 99, da disse Tal er Faktorer alene i $10^2 - 1$. Derimod giver Tallene: 303, 909, 1111, 3333 og 9999 Perioderne: 0033, 0011, 0009, 0003, 0001, mens 101 giver Perioden 0099.

Perioderne af sidste Art, altsaa svarende til Tal, der gaar op i $10^m + 1$ og følgelig er primiske med $10^m - 1$, har den Egenskab, at $(a_1 + a_{m+1}) = (a_2 + a_{m+2}) = \cdots (a_m + a_{2m}) = 9$, hvilken Egenskab Perioderne svarende til Tal, der bestaar af Faktorer baade fra $10^m - 1$ og $10^m + 1$ ikke har.

Almindeligt faar man følgende Sætning:

Th. I.

Naar p gaar op i et Udtryk af Formen $10^m + 1$, hvor $m \neq 0$, saa giver $1 : p$ en ren periodisk Decimalbrøk med lige Periodetal og kaldes dette $2q$, mens Perioden er $a_1a_2a_3 \cdots a_{2q}$, saa har man: $(a_1 + a_{q+1}) = (a_2 + a_{q+2}) = \cdots (a_q + a_{2q}) = 9$.

Bevis:

A. Decimalbrøken bliver rent periodisk, thi naar p gaar op i $10^m + 1$, saa gaar p ogsaa op i $10^{2m} - 1$ eller $r_{2m} = 1$.

B. Periodetallet bliver lige, thi da $r_{2m} = 1$, saa maa Periodetallet enten være $2m$ eller en Faktor i $2m$. Denne Faktor maa være mindre end m, da p er primisk med $10^m - 1$, eftersom p gaar op i $10^m + 1$.

Vi antager, at Periodetallet er n. Da har man $r_n = 1$, og Restrækken bliver: $10^1, 10^2, 10^3, \cdots 10^{n-1}$; ($\alpha$).

I denne maa -1 findes, thi $10^m + 1 = k \cdot p$ viser, at -1 er en mulig Rest, men alle mulige Rester findes i (α). Resten -1 kan imidlertid kun findes een Gang i (α), thi ellers havde man for visse b og a mindre end n

$$10^{n-a} + 1 = L \cdot p \quad \text{og} \quad 10^{n-a-b} + 1 = Mp,$$

eller da p er primisk med 10:

$$10^{a+b} - 10^a = N \cdot p \quad \text{eller} \quad 10^a(10^b - 1) = N \cdot p,$$

hvilket vilde føre til, at $r_b = 1$, hvad der strider mod det givne, at Periodetallet er n. Men hvis 10^q er det Led i Rækken (α), der er lig -1, saa giver 10^{2q} Resten $+1$. Man maa da have:

$$n = 2q.$$

Digitized by Google

Studenterforeningens Bibliotek

C. $$(a_1 + a_{q+1}) = (a_2 + a_{q+2}) = \cdots (a_q + a_{2q}) = 9.$$

Man har nemlig idet $r_{2b} = 1$ og $r_q = -1$ eller $p - 1$

$$10^{2q} - p[a_1 10^{2q-1} + a_2 \cdot 10^{2q-2} + \cdots a_{2q}] = 1 \quad \text{(I)}$$

og

$$10^q - p[a_1 10^{q-1} + a_2 10^{q-2} + \cdots a_q] = p - 1. \quad \text{(II)}$$

Finder man nu

$$p[a_1 \cdot 10^{q-1} + a_2 10^{q-2} + \cdots a_q] = 10^q - p + 1 \quad \text{(III)}$$

og indsættes i (I), faar man

$$p \cdot [a_{q+1} \cdot 10^{q-1} + a_{q+2} \cdot 10^{q-2} + \cdots a_{2q}] = 10^q(p-1) - 1. \quad \text{(IV)}$$

Adderes nu III og IV og bortdivideres p, faar man:

$$(a_1 + a_{q+1}) \cdot 10^{q-1} + (a_2 + a_{q+2}) \cdot 10^{q-2} + \cdots (a_q + a_{2q}) = 10^q - 1$$

eller

$$\left.\begin{aligned}(a_1 + a_{q+1}) \cdot 10^{q-1} + (a_2 + a_{q+2}) \cdot 10^{q-2} + \cdots (a_q + a_{2q}) \\ = 9 \cdot 10^{q-1} + 9 \cdot 10^{q-2} + \cdots 9.\end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

Da $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2q}$ alle er Cifre og da man maa have $a_q + a_{2q} - 9$ delelig med 10, saa har man: $a_q + a_{2q} = 9$. Idet man nu sætter $a_q + a_{2q} - 9 = 0$ og bortdividerer 10 af Udtrykket (β), faar man paa tilsvarende Maade: $a_{q-1} + a_{2q-1} = 9$; o. s. v.

Eks.: 13 gaar op i $10^3 + 1$; $\frac{1}{13} = 0{,}\overline{076923}$.

Th. II.

Hvis p er lig $u \cdot v_1$, hvor u er Faktor i $10^m + 1$, mens v er Faktor i $10^m - 1$, da er Periodetallet for $1 : [u \cdot v]$ lige, men Sætningen $(a_1 + a_{q+1}) = \cdots = 9$ gælder ikke.

Bevis:

A. Periodetallet er lige, thi $1 : u$ har et lige Periodetal i Følge foregaaende Sætning. Lad dette være $2q$. Man har da: $r_{2q} = r_{4q} = r_{6q} = \cdots = 1$.

Lad $1 : (u \cdot v)$ have Periodetallet s. Da gaar $u \cdot v$ og altsaa ogsaa u op i $10^s - 1$. Følgelig er $r_s = 1$ baade for Divisor $u \cdot v$ og u. s maa altsaa findes i Rækken $2q, 4q, 6q \cdots$.

s er lige.

Digitized by Google

B $p - 1$ kan ikke være Rest, thi var $(p - 1)$ eller -1 Rest, og var r_q den første Rest lig -1, saa blev Periodetallet $2q$. Eller

$$r_q = r_{3q} = r_{5q} = \cdots = -1,$$
$$r_{2q} = r_{4q} = r_{6q} = r_{2m} = \cdots = +1.$$

Man har jo $r_{2m} = 1$, da $u \cdot v$ gaar op i $10^{2m} - 1$. Altsaa er m et Multiplum af q, men saa maa r_m findes enten mellem Resterne for -1 eller dem for $+1$, men dette er i Strid mod at p har Faktorer baade fra $10^m + 1$ og $10^m - 1$. $(p - 1)$ kan altsaa ikke være Rest, men dermed er ogsaa udelukket, at man kan have:

$$(a_1 + a_{q+1}) \cdot 10^{q-1} + (a_2 + a_{q+2}) \cdot 10^{q-2} + \cdots a_q + a_{2q} = 10^q - 1.$$

Eks.

$$10^6 = (10^3 - 1)(10^3 + 1) = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37) \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13),$$
$$1 : 21 = 0{,}\overline{047619}; \quad 1 : 39 = 0{,}\overline{025641};$$
$$(10^6 - 1)(10^6 + 1); \quad 1 : 7000007 = 0{,}\overline{000000142857}.$$

Th. III.

Hvis p gaar op i $10^m - 1$ og dette Udtryk ikke er deleligt med Udtryk af Formen $10^n + 1$, da er Periodetallet for $1 : p$ ulige.

Bevis:

Den i Sætning III anførte Betingelse er opfyldt og kun opfyldt, naar m er ulige, men naar m er lig $2q + 1$, kan Periodetallet ikke være lige, thi var det lige, maatte r_{2q+1} findes i Rækken

$$r_{2s} = r_{4s} = r_{6s} = \cdots = 1,$$

forudsat, at Periodetallet kaldes $2s$.

Eks.:

$$m = 3; \quad p = 37; \quad \tfrac{1}{37} = 0{,}\overline{027};$$
$$m = 5; \quad p = 11111; \quad \tfrac{1}{11111} = 0{,}00009.$$

Digitized by Google

Besvarelse af Prisopgave I 1919.

Af David Fog.

Der ønskes en fuldstændig Undersøgelse af, hvilke Former en konvex Firkant kan have, naar den skal have mere end ét omskrevet Kvadrat og mere end ét indskrevet Kvadrat.

Vi vil til at begynde med undersøge vilkaarlige Firkanter og bagefter anvende Resultaterne paa de konvexe. Endvidere vil vi tage Ordene omskreven og indskreven i deres videste Betydning; at en Firkant er omskreven om en anden — og denne altsaa indskreven i den første —, skal da betyde, at den sidstes Vinkelspidser ligger paa den førstes Sider, naar disse opfattes som uendelige rette Linier.

Grundlaget for den efterfølgende Undersøgelse er »Drejningsteorien«, saaledes som den er fremstillet af Julius Petersen i »Metoder og Teorier«[1]). Her findes ogsaa to Opgaver, der staar i nær Forbindelse med den stillede[2]). De kan formuleres saaledes:

α) Der er givet to Firkanter: *abcd* med Siderne *a*, *b*, *c* og *d* og *ABCD* med Vinkelspidserne *A*, *B*, *C* og *D*; man skal ved en egentlig Ligedannethedstransformation »flytte« *abcd*, saa den bliver omskrevet om *ABCD* (saa *a* gaar igennem *A* o. s. v.) (384).

β) Der er givet ovenstaaende to Firkanter; man skal ved en egentlig Ligedannethedstransformation »flytte« *ABCD*, saa den bliver indskrevet i *abcd* (saa *A* falder paa *a* o. s. v.) (378).

De to Opgaver er i det væsentlige identiske; har man funden en Transformation, der fører til en Løsning af α), vil den modsatte Transformation give en Løsning af β), og omvendt. Som bekendt kan enhver egentlig Ligedannethedstransformation reduceres til en Drejning (i Jul. Petersen'sk Forstand). Løsningerne af α) og β) er altsaa bestemt ved hinanden modsatte Drejninger. Har den ene uendelig mange Løsninger, har den anden det ogsaa. Vi vil se paa Løsningen af α):

Man tegner en Firkant $a'b'c'd' = PQRS$ egentlig ligedannet med *abcd*, og saaledes at a' gaar gennem *A*, b' gennem *B* og c' gennem *C*. Man kan da ifølge Jul. Petersen finde et Drej-

---

[1]) Se f. Ex. 7. Udgave (ved Dr. phil. C. Hansen) 1918.

[2]) 378 og 384.

Digitized by Google

ningspunkt M, saaledes at $a'b'c'd'$ ved Drejninger om dette kan føres over i alle andre Firkanter, der er egentlig ligedannede med $abcd$, og hvor a', b' og c' gaar gennem henholdsvis A, B og C. M bestemmes som det Skæringspunkt mellem Cirklen gennem A, P og B og Cirklen gennem B, Q og C, der er forskellig fra B.

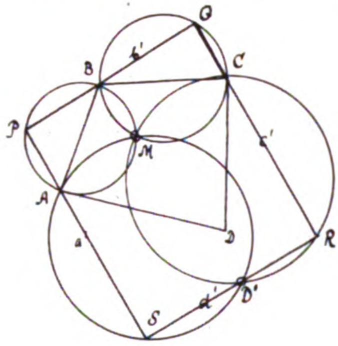


Fig. 1.

Naar $PQRS$ efterhaanden gaar over i sine andre Stillinger, vil tre af Siderne stadig gaa gennem hver sit faste Punkt A, B og C; den fjerde Side d' vil da ifølge Jul. Petersen ogsaa gaa gennem et fast Punkt D'; dette er bestemt som det fælles Skæringspunkt mellem d' og Cirklerne gennem A, M og S og gennem C, M og R.

Drejes nu $PQRS$ om M, saa RS gaar over i DD', faas en Firkant egentlig ligedannet med $abcd$ og omskreven om $ABCD$; den er i Almindelighed entydig bestemt (kan dog specielt reduceres til et Punkt); det eneste Tilfælde, hvor der kan komme flere Løsninger, er, naar D og D' falder sammen.

Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for flere Løsninger bliver ifølge ovenstaaende:

¹) Der skal existere en Firkant $PQRS$ egentlig ligedannet med $abcd$ og omskrevet om $ABCD$.

²) For den Figur, som dannes af $PQRS$ og $ABCD$, skal det gælde, at de fire Cirkler, bestemte ved Punktsættene APB, BQC, CRD, DSA, gaar igennem samme Punkt (M).

Der bliver da uendelig mange Løsninger, som alle faas frem, naar $PQRS$ drejes om M. Ved denne Drejning beskriver P, Q, R og S de fire ovennævnte Cirkler.

Herved er Opgaven α) løst og diskuteret; dette gælder da, efter hvad der tidligere er sagt, ogsaa Opgaven β); vi vil nu gaa over til de to specielle Tilfælde, som er nævnt i den stillede Opgaves Text.

I. *abcd* er et Kvadrat.

Betingelsen ²) giver straks, at A, M, C ligger paa ret Linie og ligesaa B, M, D ɔ: Diagonalerne maa staa vinkelret paa hinanden.

Digitized by Google

Da der skal være uendelig mange Løsninger, maa der, som det følger af det foregaaende, ogsaa være en, hvor Kvadratets Sider er $\neq$ *ABCD*'s Diagonaler; disse maa derfor være lige store.

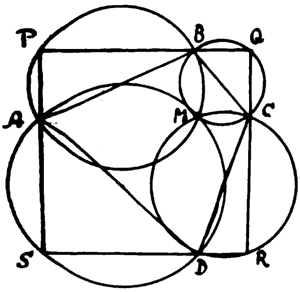


Fig. 2.

Disse Betingelser er ogsaa tilstrækkelige; thi er de opfyldte, ser man straks, at [1]) er tilfredsstillet, idet der findes et Kvadrat med Sider $\neq$ Firkantens Diagonaler, og for den derved dannede Figur er [2]) tilfredsstillet, da de fire Cirkler alle gaar gennem Diagonalernes Skæringspunkt. Vi faar da:

Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at *ABCD* har uendelig mange omskrevne Kvadrater *abcd* (saa *A* ligger paa *a* o. s. v.), er, at *ABCD*'s Diagonaler staar vinkelret paa hinanden og er lige store.

ABCD kan antage tre væsentlig forskellige Former: den kan være konvex, ukonvex eller uegentlig; i sidste Tilfælde kan man ved at ombytte to Vinkelspidser atter faa en konvex Firkant frem; denne har et Par Sider fælles med den oprindelige; det andet Par er Diagonalerne i den oprindelige. Heraf udleder vi som Svar paa Opgavens første Del følgende Sætninger:

Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at den konvexe Firkant ABCD har uendelig mange omskrevne Kvadrater af den Art, at paa hinanden følgende Sider i Kvadratet gaar igennem paa hinanden følgende Vinkelspidser af Firkanten, er, at dennes Diagonaler staar vinkelret paa hinanden og er lige store.

Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at den konvexe Firkant ABCD har uendelig mange omskrevne Kvadrater af den Art, at paa hinanden følgende Sider i Kvadratet gaar igennem modstaaende Vinkelspidser af Firkanten, er, at et Par modstaaende Sider i denne staar vinkelret paa hinanden og er lige store.

Hermed er Formen af *ABCD* bestemt.

II. *ABCD* er et Kvadrat.

Drejes *PQRS* om *M*, saa den stadig er omskreven om *ABCD*, gaar *QS* ifølge Jul. Petersen stadig gennem et fast

Digitized by Google

Punkt, som maa være det Skæringspunkt N_1 mellem Cirklerne over AB og CD, som er forskellig fra M; ligeledes gaar PR gennem Skæringspunktet N_2 mellem de to andre Cirkler. Vi faar da, naar vi regner med fuldstændige Vinkler[1]):

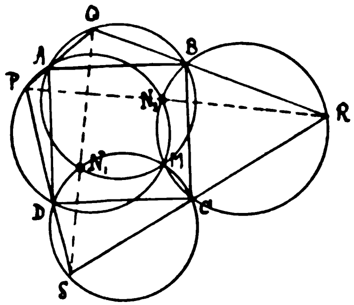


Fig. 3.

$$(\overline{MN_1}, \overline{MA}) = (\overline{QN_1}, \overline{QA})$$

$$(\overline{MN_2}, \overline{MA}) = (\overline{PN_2}, \overline{PA})$$

og analoge

eller, om man vil:

$$(\overline{MN_1}, \overline{MA}) = (\overline{QS}, \overline{QP})$$

$$(\overline{MN_2}, \overline{MA}) = (\overline{PR}, \overline{PQ}).$$

og analoge

Vi tager nu det symmetriske Punkt til M med Hensyn til Kvadratets fire Sider og faar herved en Firkant $P_1Q_1R_1S_1$, som er omskreven om Kvadratet, og hvis Diagonaler er vinkelret paa hinanden og lige store (nemlig det dobbelte af Kvadratsiden, ligegyldigt om M ligger inde i Kvadratet eller udenfor); vi faar da:

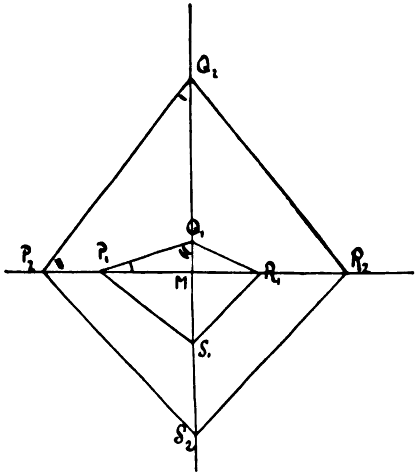


Fig. 4.

$$(\overline{P_1M}, \overline{P_1Q_1}) = -(\overline{MN_1}, \overline{MA}) = -(\overline{QS}, \overline{QP})$$

$$(\overline{Q_1M}, \overline{Q_1P_1}) = -(\overline{MN_2}, \overline{MA}) = -(\overline{PR}, \overline{PQ}).$$

og analoge

Vi bestemmer nu Firkanten $P_2Q_2R_2S_2$ (Fig. 4), saaledes at

$$\overline{MP_1} \cdot \overline{MP_2} = \overline{MQ_1} \cdot \overline{MQ_2} = \overline{MR_1} \cdot \overline{MR_2} = \overline{MS_1} \cdot \overline{MS_2}.$$

---

[1]) Smlgn.: Prof. Hjelmslev: Kongruens og Symmetri (Nyt Tidsskrift for Matematik, B, 1907 S. 11 f. f.).

Digitized by Google

Da er Trekanterne med M som Vinkelspids to og to symmetrisk ligedannede, hvoraf:

$$(\overline{P_2M}, \overline{P_2Q_2}) = -(\overline{Q_1M}, \overline{Q_1P_1})$$
$$(\overline{Q_2M}, \overline{Q_2P_2}) = -(\overline{P_1M}, \overline{P_1Q_1}).$$

og analoge, altsaa:

$$(\overline{P_2M}, \overline{P_2Q_2}) = (\overline{PR}, \overline{PQ})$$
$$(\overline{Q_2M}, \overline{Q_2P_2}) = (\overline{QS}, \overline{QP}).$$

og analoge

Da faar vi, at Firkanterne $PQRS$ og $P_2Q_2R_2S_2$ er egentlig ligedannede, hvorefter man let ser, at $PQRS$ maa opfylde følgende Betingelser:

Diagonalerne maa staa vinkelret paa hinanden; kaldes deres Skæringspunkt T, skal man have

$$\left|\frac{1}{TP} - \frac{1}{TR}\right| = \left|\frac{1}{TQ} - \frac{1}{TS}\right|,$$

naar man regner med Fortegn paa sædvanlig Maade paa Diagonalerne.

Det sidste følger af, at man for $P_1Q_1R_1S_1$ har, at Diagonalerne er lige store, hvilket kan skrives

$$|\overline{MP_1} - \overline{MR_1}| = |-\overline{MQ_1}\ \overline{MS_1}|.$$

Disse Betingelser er ogsaa tilstrækkelige; thi er de opfyldte, kan vi føre Ræsonnementerne tilbage. Vi gaar da ud fra Firkant $P_2Q_2R_2S_2$ egentlig ligedannet (specielt kongruent) med den givne og afleder heraf $P_1Q_1R_1S_1$, idet vi sørger for at vælge en saadan Værdi for Produkterne, at $P_1Q_1R_1S_1$'s indskrevne Kvadrat, der faas ved at forbinde Sidernes Midtpunkter, bliver lige stort med det givne. Vinkelspidsernes symmetriske Punkter med Hensyn til de tilsvarende Kvadratsider falder da sammen i M, hvorpaa vi kan tegne de fire Cirkler AMB, BMC, CMD, DMA, hvorved samtidig Punkterne N_1 og N_2 bestemmes. Tegnes nu to vilkaarlige paa hinanden vinkelrette Linier gennem N_1 og N_2, bestemmes ved Skæring med Cirklerne de fire Punkter P, Q, R og S; ifølge Vinkelrelationerne vil da PQ, QR, RS og SP gaa gennem henholdsvis A, B, C og D, og vi har uendelig mange Firkanter omskrevne om Kvadratet.

Firkanten $abcd$ kan ligesom før være konvex, ukonvex eller

Digitized by Google

uegentlig; ved Ombytning af to Sider kan man af de sidste to Tilfælde atter faa en konvex Firkant. Som Svar paa den stillede Opgaves anden Del faar vi da Sætningerne (vi regner nu uden Fortegn):

Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at den konvexe Firkant PQRS har uendelig mange indskrevne Kvadrater af den Art, at paa hinanden følgende Vinkelspidser af Kvadratet ligger paa hinanden følgende Sider af Firkanten, er, at dennes Diagonaler staar vinkelret paa hinanden, og desuden at

$$\frac{1}{TP} + \frac{1}{TR} = \frac{1}{TQ} + \frac{1}{TS},$$

naar T er Diagonalernes Skæringspunkt.

Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at den konvexe Firkant PQRS har uendelig mange indskrevne Kvadrater af den Art, at paa hinanden følgende Vinkelspidser af Kvadratet ligger paa modstaaende Sider af Firkanten, er følgende:

Lad de to Par modstaaende Sider skære hinanden i M og N; da skal en af Firkantens Diagonaler, f. Ex. PR, være vinkelret paa MN; lad disse to Liniers Skæringspunkt være O; da skal man have:

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \left| \frac{1}{OP} - \frac{1}{OR} \right|.$$

Hermed maa Firkantens Form atter siges at være bestemt.

Litteraturanmeldelser.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift. Udgivet af Astronomisk Selskab, København. Redaktører: Julie M. Vinter Hansen, J. Fr. Schroeter, Walter Gyllenberg. Ny Række. Bd. 1, Nr. 1 1920. (G. E. C. Gad).

Den ny Række af dette Tidsskrift aabnes med et smukt udstyret Hefte paa 32 Sider, som indeholder: Elis Strømgren, Scylla og Carybdis, ett Kapitel ur Proplemet om Stjernornes

Digitized by Google

Utvecklingshistorie. Julie M. Vinter Hansen, om Stjernetemperaturer. A. S. Eddington, Tyngdekraften og Relativitetsprincippet. Den sidste, fra engelsk oversatte Afhandling, giver en ægte engelsk, populariserende Fremstilling af et af den moderne Fysiks Hovedproblemer. Vi anbefaler vore Læsere at gøre sig bekendt med Tidsskriftet. T. B.

Opgaveafdeling.

Redigeret af cand. mag. G. M. Stensig.

Danske Eksamensopgaver.

Skovbrugs- og Landinspektøreksamen.

Februar—Marts 1920.

Regning.

Find sin, cos og tg til de Vinkler, hvis Udtryk i Tal er: 0,6373; 2,7270; 4,0574; 5,7141. Bestem dernæst de Korder i Cirklen med Radius 1 m, hvis Buer har samme Gradantal som de givne Vinkler.

Resultater:

Kordernes Længder bliver 0,6266 m, 1,9573 m, 1,7940 m og 0,5617 m.

Algebra.

En Mand indsætter den 1ste Dag i hvert Kvartal i Aarene 1900—1919, begge inklusive, 133 Kr. i en Sparekasse, der i aarlig Rente giver $4^1/_4$ %. 1ste Januar 1920 anbringer han sine opsparede Penge paa Rentes Rente til 5 % p. A. Hvorlænge kan han derefter hver 1ste Januar hæve 1153 Kroner, og hvad er der efter sidste Hævning tilbage af hans Kapital?

$1{,}0425^{\frac{1}{4}} = 1{,}010460$. 5cifrede Log.tavler anvendes.

Resultater:

$n = 26{,}37$; Restkapitalen 426,61 Kr.

Trigonometri.

I en plan Trekant ABC er givet Siderne $a = 23{,}488$ m og $b = 29{,}665$ m samt Arealet $T = 180{,}65$ m². Find Vinklerne, Siden c og Vinkel C's Halveringslinie?

Digitized by Google

Resultater:

a) $\angle A = 51^0\,48',5$, $\angle B = 96^0\,57',5$, $\angle C = 31^0\,14',0$, $V_C = 25{,}251$ m; b) $\angle A = 13^0\,45',36$, $\angle B = 17^0\,28',64$, $\angle C = 148^0\,46',0$, $V_C = 7{,}0582$ m.

Stereometri.

I en regulær Pyramidestub, hvori der kan indskrives en Kugle, er de mindste Radier i Endefladerne 6,234 m og 2,678 m. Find Stubbens Højde, indskrevne Kugles Radius samt Sidetrapezernes Højder og Vinkler med Endefladerne. Hvis Stubbens Sideantal er = 17, hvor stor er da dens Rumfang og Overflade og Vinklen mellem paa hinanden følgende Sidetrapezer?

Resultater:

$h = 2r = 8{,}172$ m, $u = 66^0\,29'$; $Rf = 542{,}9$ m^3, $O = 398{,}6$ m^2.

Analytisk Geometri.

Der er givet Punkterne A, B og C med Koordinaterne (4,0), (6,6) og (0,2). Dan Ligningen for Cirklen gennem A, B og C samt Ligningen for Cirklens Tangent i B. Bestem dernæst et Punkt D paa Cirklen saaledes, at Firkanten $ABCD$ er konveks og har Arealet $\frac{110}{7}$.

Resultater:

Cirklens Ligning: $(x - (\frac{23}{7})^2 + (y - \frac{25}{7})^2 = \frac{650}{49}$; Tangentens Ligning: $19x + 17y = 216$. For Koordinaterne (a, b) til D findes

$$a = \begin{cases} \frac{8}{5} \\ \frac{12}{7}, \end{cases} \quad b = \begin{cases} \frac{12}{35} \\ \frac{2}{7} \end{cases}.$$

Differential- og Integralregning.

Find Arealet begrænset af den ligesidede Hyperbel med Ligningen $xy = 1$, Abscisseaksen og Ordinaterne svarende til $x = 1$ og $x = 9$, dels med 4 Decimaler ved Integration, dels ved Anvendelse af Simpsons Formel

$$A = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)\right],$$

hvor $h = 1$ og y'erne bestemmes med 5 Decimaler. Bestem dernæst Hyperblens Krumningsradius

Digitized by Google

$$\rho = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ i Punktet med Abscissen } x.$$

$e = 2{,}7183.$

Resultater:

$2{,}197(1)$; $2{,}21005$; $\rho = \frac{(x^2 + x^{-2})^{\frac{3}{2}}}{2}.$

Pigeskolens Faglærerindeeksamen.

April 1920.

Matematik I.

1. Givet to Cirkler med Centrerne A og B samt to Punkter P og Q. Konstruer en Cirkel, som gaar gennem P, rører Cirkel A, og hvis Fælleskorde med Cirkel B gaar gennem Q.

2. Ligningen $11x + 7y = 76$ løses i hele Værdier af x og y. Bestem det af disse Værdisæt, som gør $x^2 - y^2$ saa stor som mulig.

3. Bevis, at der er konstant Forhold mellem en Ellipsediameter og Normalen i Endepunktet af den konjugerede Diameter (Normalen regnes for Ellipsepunktet til Skæringspunktet med Storaksen).

Resultater:

1. Da Q har samme Potens med Hensyn til B og den søgte Cirkel, kan man bestemme dennes Skæringspunkt med QP. Derefter er Løsningen velkendt.

2. $x = 5 + 7\,\text{m}$, $y = 3 - 11\,\text{m}$.

$$x^2 - y^2 = 72\left(\tfrac{361}{324} - \left(m - \tfrac{17}{18}\right)^2\right).$$

$$m = 1. \quad x^2 - y^2 = 80.$$

3. Forholdet $= \frac{2a}{b}$.

Matematik II.

1. I Ligningen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ er Rødderne α, β og γ. Dan den Ligning, hvis Rødder er $\alpha + 2\beta + 3\gamma$, $\beta + 2\gamma + 3\alpha$ og $\gamma + 2\alpha + 3\beta$.

Prøv Resultatets Rigtighed ved et Taleksempel.

2. Fra et Punkt A paa en Slette syd for et Bjerg ses Bjergets Top under en Vinkel v med den vandrette Plan, og fra Punktet B, som ligger paa Sletten i Afstand a vest for A,

Digitized by Google

under en Vinkel u. Find Bjergets Højde logaritmisk udtrykt ved a, v og u.

3. Tre Personer P_1, P_2, P_3 vælger hver sin af tre Genstande G_1, G_2, G_3. Man kan finde, hvilken Genstand hver har valgt, paa følgende Maade: Paa et Bord lægges 24 Brikker; af disse skal først P_1 tage 1, P_2 2 og P_3 3 Brikker; dernæst skal den Person, der har valgt G_1, tage lige saa mange Brikker, som han allerede har; den der har valgt G_2, skal tage dobbelt saa mange Brikker, som han allerede har; og den, som har valgt G_3, skal tage 4 Gange saa mange Brikker, som han allerede har. Genstandenes Fordeling er da bestemt ved Restbrikernes Antal. Hvorledes indses det?

Resultater:

1.
$$x^3 + 6ax^2 + (11a^2 + 3b)x + (6a^3 + 5ab + 3c - 2(\alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2) = 0.$$

2.
$$\frac{a \sin v \sin u}{\sqrt{\sin(v+u)\sin(v-u)}}.$$

3, Restbrikkernes Antal bliver ved de 6 tænkelige Kombinationer 1, 2, 3, 5, 6, 7, og da disse Rester er forskellige, bestemmer Restens Størrelse entydigt det trufne Valg.

Matematik III.

Et 5 %'s Statslaan er inddelt i 100 lige store Serier, hver indeholdende 8 Grupper af Obligationer, lydende paa a) 10000, b) 5000, c) 2000, d) 1000, e) 500, f) 200, g) 100, h) 50 Kr.

Tegningen af Laanet foretages i Løbet af August — til Parikurs — og ved Betaling før 1. Sept. godtgøres Renten (5 % p. a.) for disse Dage.

I. A tegnede sig for 2 Obligationer af hver Gruppe og betalte dem med ialt 37605,75 Kr. — Hvilken Dato betalte han dem?

En af de nævnte Serier indeholder 540 Obligationer, fordelt i de 8 Grupper saaledes, at der er $2\frac{1}{3}$ Gang saa mange i »a« som i »b«; i »c« og »d« er der lige mange, og Antallet af Obligationer i hver af dem er 10 % større end i »a« og »b« tilsammen; i »b« er der 25 % færre Obligationer end i »e«, og Værdien af alle Obligationer i »f« er 20 % af Værdien af dem i »e«.

II. Hvor stort var dette Statslaan, naar den samlede Værdi af Obligationerne i »c« er 240000 Kr. større end Vær-

Digitized by Google

dien af dem i »e«, og Værdien af hele Serien er $705\frac{5}{9}$ % større end Værdien af Gruppe »b«?

III. Hvor mange Obligationer er der af hver Slags i denne Serie?

Af de Obligationer, A tegnede sig for i August, sælger han den 13. Februar næste Aar alle dem i de fire første Grupper — med Kuponer — og faar ialt 37484,10 Kr. for dem. — Renteterminer $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{9}$.

IV. Til hvilken Kurs solgtes de, naar Kurtagen er $1\frac{1}{4}$ ‰?

V. Hvor mange % p. a. har A haft af de Penge, han satte i Handelen med de saaledes solgte Obligationer? (2 Dec.)

(Besvarelsen maa være saa udførlig, at Fremgangsmaaden træder klart frem, og Ligning bør ikke anvendes ved Løsningen.)

Resultater:

I. 13. August. — II. 145 Mill. Kr. — III. 84, 36, 132, 132, 48, 20, 64 Oblig. — IV. 102. — V. 8,77 % p. a.

Matematik IV.

Der ønskes en Oversigt over Metoderne til Løsning af forskellige Arter af Ligninger med 1 eller 2 ubekendte.

Almindelig Forberedelseseksamen.

Marts—April 1920.

Regning.

1. En Guldsmed køber en 10 cm lang cylindrisk Stang af rent Guld for 2480 Kr. pr. kg. Hvor mange cm er Diametren i Cylindrens Grundflade, naar Guldstangen koster 9548 Kr., og Guldets Vægtfylde er 19,6?

Guldsmeden anvender 340 g af Guldet. Resten sammensmelter han med Kobber og faar derved en Legering, hvis Indhold af rent Guld er 585 pro mille af Metalvægten. Hvor mange kg Kobber indeholder Legeringen?

En Cylinder, hvis Højde er h, og hvis Grundflades Diameter er d, har Rumfanget $\frac{11}{14} hd^2$.

2. D. 1. Juni 1914 købte A en rektangulær Byggegrund, der er 61 m lang og 42 m bred, for 1,50 Kr. pr. m². Hvor stor var Købesummen?

Samme Dag satte A en Kapital lige saa stor som Købesummen i en Bank, der giver $2\frac{1}{2}$ pCt. i halvaarlig Rente. D. 1. December 1918 solgte han Byggegrunden for 7683 Kr.

Digitized by Google

Hvormeget er Salgssummen større end hans Tilgodehavende i Banken paa samme Tidspunkt?

Hvor mange pCt halvaarlig maatte Banken have givet, for at Kapitalen netop kunde vokse til Salgssummens Størrelse?

Der regnes med Rente af Rente.

Resultater:

1. $d = 5$ cm; 2,49 kg Kobber. — 2. 2884 Kr.; 8 %.

Aritmetik.

1. Reducer Størrelsen

$$\frac{a^2 + b^2 - ab}{(a^2 + b^2)(p^2 + q^2)} + \frac{ab}{(ap + bq)^2 + (bp - aq)^2}.$$

2. Opløs Polynomiet

$$x^2 + 2(3a + 1)x + 8a(a + 1)$$

i Faktorer. — For hvilken Værdi af a bliver Faktorerne lige store?

3. I en Differensrække paa 7 Led er Differensens Kvadrat 6 større end Differensen. Find Rækkens Led, naar det midterste Led er 10.

Resultater:

1. $\frac{1}{p^2 + q^2}$. — 2. $(x + 4a)(x + 2a + 2)$; $a = 1$.

3. 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19; 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4.

Geometri.

1. I en Trekant ABC er Siden AB delt i 3 lige store Dele af Punkterne M og N (M nærmest ved A), og Siden AC delt i 3 lige store Dele af Punkterne P og Q (P nærmest ved A); Linien gennem M og Q skærer BC's Forlængelse i D. Find Længderne af QN, PM og CD, naar $BC = a$.

2. Find Korden til en Bue paa 150° i en Cirkel med Radius r.

3. Paa Siden AB i Kvadratet $ABCD$ ligger Punktet P saaledes, at $PA = \frac{3}{2} PB$. Konstruer gennem P en Linie, der skærer Siden CD i Q, saaledes at Arealet af Firkanten $APQD$ er 3 Gange saa stort som Arealet af $BPQC$.

Resultater:

1. $QN = \frac{2}{3}a$, $PM = CD = \frac{1}{3}a$. — 2. $k = \frac{r}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. —

3. $\frac{QD}{CQ} = \frac{9}{1}$.

Digitized by Google

Realeksamen.

Marts—April 1920.

Regning og Matematik.

1. Et Arbejderhold paa 13 Mand har i $12\frac{1}{3}$ Dag à 9 Timer gravet en Skyttegrav, der er 75 m lang, $3\frac{1}{4}$ m bred og 4 m dyb. Et andet Arbejderhold paa 7 Mand har i $19\frac{1}{4}$ Dag à 8 Timer gravet en Skyttegrav, der er 72 m lang, $2\frac{1}{2}$ m bred og $3\frac{3}{4}$ m dyb.

Beregn med 3 Decimaler Forholdet mellem de Jordmængder, der er udgravet pr. Time af 1 Mand i det første Hold og af 1 Mand i det andet Hold.

En Skyttegravs Rumfang er Produktet af dens Længde, Bredde og Dybde.

2. Hvor mange kg à 2,75 Kr. skal blandes med 105 kg à 2,20 Kr., for at Blandingen skal kunne sælges med en Fortjeneste af $33\frac{1}{3}$ pCt. for 3,20 Kr. pr. kg?

3. En Mand anbringer 1200 Kr. i en Bank til $4\frac{1}{2}$ pCt. p. a. og 1800 Kr. i en Sparekasse.

Find Sparekassens aarlige Rentefod, naar de to Kapitaler tilsammen efter 6 Aars Forløb er vokset til en Sum, der er 20 Kr. mindre end den, de tilsammen vilde være vokset til i samme Tidsrum, hvis de begge havde været forrentet med 4 pCt. p. a.

Resultater:

1. 1,079. — 2. 60 kg. — 3. 3,5 %.

Regning for Piger.

1. (Som 1. i foregaaende Sæt.)

2. En Mand køber d. 8. Juli 16000 Kr. 4 pCt's Obligationer (Termin $\frac{1}{6}\frac{1}{}$, $\frac{1}{12}$) til Kurs $82\frac{1}{2}$ og betaler 1 p. m. i Kurtage; hvor meget giver han for Obligationerne?

D. 29. September sælger han Obligationerne til Kurs $83\frac{1}{4}$; hvor mange p. m. betaler han i Kurtage, naar han ved Salget tjener 230,82 Kr.?

Resultater:

2. 13261,20 Kr.; 1,5 ‰.

Mellemskoleeksamen.

Marts—April 1920.

Regning.

1. I Skoleaaret 1906—07 var Elevantallet i Statens Gymnasieskoler 2443, og Udgiften til disse Skoler beløb sig til

Digitized by Google

883 000 Kr. I 1915—16 var Elevantallet 3119, og Udgiften 1 052 000 Kr.

Beregn Gennemsnitsudgiften pr. Elev i 1906—07 og i 1915—16 (hele Kr).

Hvor mange pCt. steg Elevantallet fra 1906—07 til 1915—16?

Hvor mange pCt. steg Udgiften i samme Tidsrum?

Hvor mange pCt. steg eller faldt Gennemsnitsudgiften pr. Elev i samme Tidsrum?

Naar en Elev i 1915—16 undervistes 36 Timer ugentlig i 40 Uger, hvor stor var da Udgiften til en Elev pr. Time?

2. En Mand anbringer 120 000 Kr. i 4 forskellige Foretagender, som betegnes ved A, B, C og D, nemlig $\frac{1}{3}$ af Kapitalen i A, $\frac{1}{4}$ i B, $\frac{1}{5}$ i C og Resten i D. Det første Aar giver A $7\frac{1}{5}$ pCt., B $5\frac{1}{3}$ pCt. og C $8\frac{1}{4}$ pCt. i Udbytte, medens D giver 1 pCt's Tab.

Hvor mange pCt. blev Mandens Fortjeneste i dette Aar?

Resultater:

1. 361 Kr. og 337 Kr.; 27,67 %, 19,14 %, 6,65 %; 24 Øre.
2. $5\frac{1}{6}$ %.

Matematik.

1. Konstruer en Trekant ABC af $AB = 7$ cm, $\angle A = 45^0$ og $\angle C = 60^0$. Konstruer paa Siden BC et Punkt P saaledes, at PC er 2 cm større end PB.

2. Naar 8,1 divideres med et vist Tal, faar man samme Resultat, som naar 8,1 adderes til Tallet.

Find Tallet.

Resultater:

2. 0,9, — 9.

Lærer- og Lærerindeeksamen.

1920.

Regneopgave Nr. 1.

(3 Timer).

Af 6500 kg dansk og 17686,5 kg amerikansk Hvede fremstiller en Dampmølle 3050 kg rent dansk Mel, 10417 kg amerikansk og 4075 kg Blandingsmel.

I. Naar den danske Hvede giver 72 pCt. Mel, a) i hvilket Forhold er dansk og amerikansk Mel saa blandet? og b) hvor mange pCt. Mel (2 Dec.) giver den amerikanske Hvede?

Digitized by Google

Den amerikanske Hvede er indkøbt i New York og svinder undervejs $2\frac{1}{2}$ pCt. Assurance og andre Omkostninger udgør $1\frac{3}{4}$ pCt. af Indkøbsprisen, og Fragten betales med 15 Kr. pr. 100 kg, som er indskibet i New York. Den danske Hvede er indkøbt for 39 Kr. pr. 100 kg, og al Hveden staar Møllen i 12582 Kr.

II. Hvor stor var Indkøbsprisen pr. 60 lbs. i New York, naar 100 lbs. = 45,35 kg og 1 Dollar = 4,5 Kr.?

Foruden Mel fremkommer der ved Malingen af Hveden Klid, som sælges for i alt 1459,30 Kr. Møllens Nettofortjeneste ved Salget af Mel og Klid er $12\frac{1}{2}$ pCt. af Udsalgsprisen. Driftsudgifterne beløber sig til 718 Kr.

III Til hvilken Pris pr. 100 kg sælges hver af de tre Slags Mel, naar Priserne pr. kg dansk og amerikansk Mel forholder sig som 12 : 17?

(Besvarelsen skal nedskrives saa udførligt, at Tankegangen træder klart frem.)

Resultater:

I a. 2 : 3. I b. 72,72 pCt. II. 2,4 Dollars. III. 60 Kr., 85 Kr., 75 Kr.

Regneopgave Nr. 2.

(3 Timer).

Paa en vandret Plads er der gravet en Dam. Udgravningens øverste Flade er et Rektangel, 35 m langt og 30 m bredt, og indtil en Dybde af 50 cm er Sidevæggene lodrette.

I de næste 1,5 m Dybde skraaner alle Sidefladerne jævnt — de modstaaende tillige ens — nedad i Retning mod samme Punkt, og denne Del af Udgravningen er i Bunden 14 m lang i sin største Udstrækning.

Derefter skraaner Sidefladerne jævnt nedad, saaledes at Dammen *kun* har sin største Dybde — 4,4 m — lodret under Midtpunktet af Udgravningens øverste Flade.

I. Hvor mange Hektoliter Vand kan Dammen rumme?

En Sommerdag var Vandoverfladen 0,0672 ha.

II. Hvor stor var Vandets største Dybde?

Efter Tøbruddet var der en Foraarsdag 7162,75 hl Vand i Dammen.

III. Hvor mange Hektar var saa Vandoverfladen?

(Besvarelsen skal nedskrives saa udførligt, at Tankegangen træder klart frem.)

Resultater:

I. 14784 hl. II. 3,4 m. III. 0,08505 ha.

Digitized by Google

Algebra.

(3 Timer).

1. Find de Værdisæt af x og y, der tilfredsstiller Ligningerne

$$xy + x + y = -2,$$
$$x^2 + y^2 + 2x + 2y = 4a^2.$$

Hvormange Værdisæt finder man? Vis, at alle de fundne Værdier af x og y er reelle, naar a er reel.

2. Find de Værdier af x, der tilfredsstiller Ligningen

$$x^{\log x} = 7{,}534.$$

Resultater:

1. Fire Værdisæt: $\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \pm a - 1 \pm \sqrt{a^2 + 1}.$

2. $x = 8{,}64;\ 0{,}1157.$

Geometri.

(3 Timer.)

1. $ABCD$ er et Trapez, hvori Siderne AD og BC er parallele, og hvori Vinklerne A og B begge er rette; tillige ved man, at Diagonalerne staar vinkelret paa hinanden. Man har givet $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm. Find de fire Stykker, hvori Diagonalerne deler hinanden, samt de ikke givne Sider i Trapezet.

2. Paa Papiret er givet en Cirkel med Centrum, og indeni Cirklen et Punkt P, hvis Afstand fra Centret er større end Cirklens halve Radius. Konstruer en i Cirklen indskrevet ligesidet Trekant, hvis ene Side gaar gennem P.

Resultater:

1. $\frac{16}{5}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{64}{15}$; $AD = \frac{16}{3}$, $CD = \frac{\sqrt{193}}{3}$.

2. Fra P kan man tegne Tangenterne til en Cirkel koncentrisk med den givne og med halv saa stor Radius.

Løste Opgaver.

40. Idet A og B er givne Vinkler og

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \sin 2A - \operatorname{tg} B}{1 + 2 \cos 2A},\ \operatorname{tg} y = \frac{2 \sin 2B - \operatorname{tg} A}{1 + 2 \cos 2B},$$

skal man finde $x + y$; spec. $A = B$. **H. Paulli.**

Digitized by Google

Opgavestillerens Løsning:

Man har:

$$\operatorname{tg}(x-A)=\frac{2\sin 2A - \operatorname{tg}B - \operatorname{tg}A - 2\operatorname{tg}A\cos 2A}{1+2\cos 2A + 2\operatorname{tg}A\sin 2A - \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}=\frac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{3-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}. \quad (1)$$

Da det forelagte Udtryk for $\operatorname{tg} y$ fremkommer ved i Udtrykket for $\operatorname{tg} x$ at ombytte A, B og x med B, A og y faas af (1):

$$\operatorname{tg}(x-A) = -\operatorname{tg}(y-B),$$

hvoraf:

$$x+y=p\pi + A + B.$$

For $A=B$ bliver Tælleren i (1) lig Nul, og Nævneren lig Nul for $A=B=p\pi \pm \frac{\pi}{3}$; for disse Værdier af $A=B$ bliver x og y ubestemte, medens man for alle andre Værdier af $A=B$ faar: $x=y=p\pi + A$.

41. Løs og diskuter Ligningerne

$$\cos x + \cos y = a,$$
$$\cos 3x + \cos 3y = b.$$

Løsning:

Da $\cos 3v = 4\cos^3 v - 3\cos v$, kan den sidste Ligning skrives som $4(\cos^3 x + \cos^3 y) - 3(\cos x + \cos y) = b$ eller

$$\cos^3 x + \cos^3 y = \frac{b+3a}{4}. \quad (1)$$

Opløfter man begge Sider i Ligningen

$$\cos x + \cos y = a \quad (2)$$

til 3. Potens, faar man

$$\cos^3 x + \cos^3 y + 3\cos x\cos y(\cos x + \cos y) = a^3$$

eller under Hensyntagen til (1) og (2)

$$\cos x\cos y = \frac{4a^3 - 3a - b}{12a}.$$

Dernæst kan $\cos x$ og $\cos y$ findes som Rødder i Ligningen

$$X^2 - aX + \frac{4a^3 - 3a - b}{12a} = 0.$$

Betingelsen for reelle Rødder bliver $\frac{b}{a} \geqq a^2 - 3$. Er a positiv, udleder man endvidere Betingelserne

Digitized by Google

$$a(a^2 - 3) \leqq b \leqq a(2a - 3)^2, \quad a \leqq 2.$$

Er a negativ, finder man

$$a(2a + 3)^2 \leqq b \leqq a(a^2 - 3), \quad a \geqq -2.$$

42. Gennem et Punkt P paa Diameteren AB i en Cirkel trækker man en vilkaarlig Korde MN. I P oprejses vinkelret paa AB en Linie, der skærer Tangenterne i M og N henholdsvis i E og F. Bevis, at $PE = PF$.

Løsning:

Man kan forbinde Punkterne M, N, E og F med Centrum O. Da Firkant $OPME$ er indskrivelig, er $\angle POE = \angle PMR$, hvor R er et Punkt paa Tangenten i M, saaledes at ME og MR er modsat rettet. Da ogsaa Firkant $OPNF$ er indskrivelig, er $\angle POF = \angle PNF$. Men $\angle PMR = \angle PNE$, og altsaa $\angle POE = \angle POF$, hvoraf følger, at $PE = PF$.

Otto Peschardt.

(Ogsaa løst af Valdemar Simonsen).

43. Bevis, at Udtrykket

$$\frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{2\sin^6 x}{6} + \frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\sin^4 x}{4}$$

er uafhængigt af x.

Løsning:

Man har:

$$\cos^8 x = (1 - \sin^2 x)^4 = 1 - 4\sin^2 x + 6\sin^4 x - 4\sin^6 x + \sin^8 x,$$
$$\cos^6 x = (1 - \sin^2 x)^3 = 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x,$$

hvilket indsat i Udtrykket giver

$$(\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8})\sin^8 x + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6})\sin^6 x + (-\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4})\sin^4 x + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2})\sin^2 x - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{24}.$$

Georg Rasch.

(F. A. Madsen viser, at Udtrykkets Differentialkvotient forsvinder; andre Løsninger af Otto Peschardt og Valdemar Simonsen).

44. Find største fælles Maal for Tallene.

$$2^{2623} - 1 \quad \text{og} \quad 2^{1161} - 1.$$

Løsning:

Man opløser Eksponenterne i Faktorer paa følgende Maade: $2623 = 43 \cdot 61$ og $1161 = 43 \cdot 27$ og faar da, idet man sætter $2^{43} = a$

Digitized by Google

$$t_1 = a^{61} - 1 = (a - 1)(a^{60} + a^{59} + \cdots + a + 1)$$
$$t_2 = a^{27} - 1 = (a - 1)(a^{26} + a^{25} + \cdots + a + 1).$$

$a - 1 = 2^{43} - 1$ er altsaa en fælles Faktor for t_1 og t_2. Vi tænker os, at t_1 og t_2 desuden har den fælles Faktor f og sætter

$$a^{60} + \cdots + a + 1 = f \cdot m_1$$
$$a^{26} + \cdots + a + 1 = f \cdot m_2,$$

hvoraf

$$f \cdot m_1 = (a^{34} + a^7) \cdot f \cdot m_2 + a^6 + a^5 + \cdots + 1.$$

Vi kan altsaa sætte

$$a^6 + \cdots + a + 1 = f \cdot m_3,$$

der giver

$$f \cdot m_2 = (a^{20} + a^{13} + a^6 + 1) \cdot f \cdot m_3 - a^6.$$

f maa altsaa gaa op i a^6; men det er umuligt, da t_1 og t_2 er ulige Tal, og a er en Potens af 2.

Største fælles Maal for t_1 og t_2 er da $2^{43} - 1$.

Georg Rasch.

45. En Prismatoides ene Endeflade er en vandret, regulær Sekskant *ABCDEF* med Siden a, den anden Endeflade en ligesidet Trekant *LMN*, hvis Vinkelspidser ligger lodret over henholdsvis Punkterne A, C og E. Endefladernes Afstand er b. Bestem Prismatoidens Volumen og Toplansvinkler. Prismatoiden skæres af en Plan parallel med Endefladerne. Bestem Arealet af Snitfladen, naar dens Afstand fra den nederste Endeflade er c.

G. M. Stensig.

Løsning:

Da Prismatoiden ved Hjælp af 3 Pyramider kan suppleres til et ret Prisme, kan man ved simple Regninger finde Prismatoidens Volumen at være $\frac{5}{4}\sqrt{3}a^2b$. Langs Kanten AB er Toplansvinklen 90^0, langs AL er den 120^0. For Toplansvinklen v langs Kanten NL haves $\operatorname{tg} v = -\frac{2b}{a}$. Toplansvinklen p langs Kanten LF kan man ved Anvendelse af en cos.-Formel fra den sfæriske Trigonometri finde af det tresidede Hjørne $L - AFN$; man faar

$$\sin p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + 4b^2}}, \quad \cos p = -\sqrt{\frac{3b^2}{a^2 + 4b^2}}.$$

For en Prismatoides Volumen V haves som bekendt

$$V = \frac{h}{6}(A_1 + A_2 + 4A_m),$$

Digitized by Google

hvor h er Højden, A_1 og A_2 Endefladernes Arealer og A_m Midtersnittets Areal.

I det foreliggende Tilfælde finder man $A_m = \frac{21}{16}\sqrt{3}a^2$, da

$$A_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2, \quad A_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2, \quad h = b \quad \text{og} \quad V = \frac{5\sqrt{3}}{4}a^2 b.$$

For at finde Arealet S af den søgte Snitflade i Afstanden c fra den nederste Endeflade kan man bemærke, at S maa være en kvadratisk Funktion af c, altsaa af Formen

$$S = Ac^2 + Bc + C,$$

hvor man imidlertid kender Værdien af Polynomiet paa højre Side for 3 Værdier af c, nemlig for $c = a$, $c = \frac{b}{2}$ og $c = b$. Herved kan man bestemme Konstanterne A, B og C og finder

$$S = A_2 \cdot \left(2 - \frac{c^2}{b^2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\left(2 - \frac{c^2}{b^2}\right).$$

46. I et sædvanlig retvinklet Koordinatsystem betragter man et variabelt Keglesnit, der gaar gennem Punkterne $(0, a)$, $(-a, 0)$ og $(0, -a)$ og rører Linien $x = a$. Man trækker Tangenterne til Keglesnittet i Punkterne $(0, a)$ og $(0, -a)$. Find det geometriske Sted for disse Tangenters Skæringspunkt.

G. M. Stensig.

Løsning:

Ligningen for et Keglesnit gennem Punkterne $(0, a)$, $(-a, 0)$, $(0, -a)$ og (a, b) — det sidste altsaa beliggende paa Linien $x = a$ — kan skrives paa Formen

$$(2ay - bx - ab)\,x = k\,(y + x + a)\,(ay + (a - b)\,x - a^2),$$

hvor k er en Parameter.

Betingelsen for, at $x = a$ rører Keglesnittet, giver $k = \frac{2a}{2a + b}$.

Ved at differentiere Keglesnittets Ligning kan man finde, at Ligningerne for de to Tangenter i $(0, a)$ og $(0, -a)$ bliver henholdsvis

$$y - a = \frac{4ab - b^2}{4a^2}\cdot x \quad \text{og} \quad y + a = \frac{4ab + b^2}{4a^2}\cdot x.$$

Elimination af b viser, at det søgte geometriske Sted bliver Parablen

$$y^2 = 4ax.$$

Digitized by Google

47. En ret cirkulær Kegle, hvis halve Toppunktsvinkel er v, omskrives med et Tetraeder $OABC$, saaledes, at Keglens Grundflade indskrives i Trekant ABC med Siderne a, b og c. Find Siderne i det tresidede Hjørne, der har O til Toppunkt. Hvor stor maa v være, hvis en af Hjørnets Sider skal være 90^0?

G. M. Stensig.

Løsning:

Lad D være det Punkt, hvori a rører Keglens Grundflade, hvis Radius kaldes r. Man har da: $\operatorname{tg} DOC = \frac{(s-c)\sin v}{r}$, $\operatorname{tg} DOB = \frac{(s-b)\sin v}{r}$, idet $2s = a + b + c$. Med Benyttelse af Formlen $T = rs$ og Additionsformlen for tangens-Funktionen finder man dernæst

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} BOC = \frac{a \sin v}{s \cos^2 v - a}\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}.$$

Betingelsen for $\alpha = 90^0$ bliver altsaa $\cos^2 v = \frac{a}{s}$.

48. I en Sekskant, der er indskrevet i en Cirkel, gaar de tre*) Diagonaler mellem de modstaaende Vinkelspidser gennem de modstaaende Siders Skæringspunkter. De paa hinanden følgende Vinkelspidser betegnes med 1, 2, 3, 4, 5, 6 og Vinklerne i Sekskanten med det Tal, sat i Parentes, der betegner Vinkelspidsen.

1. Bevis, at:

$$(12)\sin(4)\sin(5):(45)\sin(1)\sin(2):(36)\sin(3)\sin(6) =$$
$$(34)\sin(6)\sin(1):(61)\sin(3)\sin(4):(25)\sin(2)\sin(5) =$$
$$(56)\sin(2)\sin(3):(23)\sin(5)\sin(6):(14)\sin(1)\sin(4) =$$
$$\left[(12)(34)(56)\right]^{\frac{1}{3}}:\left[(23)(45)(61)\right]^{\frac{1}{3}}:\left[(14)(25)(36)\right]^{\frac{1}{3}}.$$

2. Konstruer Sekskanten, naar Vinkelspidserne 1, 2, 3 og 4 er givne saaledes, at $(23) \mathrel{+\!\!\!\!\!\!=} (14)$ og $\angle(412) = 60^0$.

H. Paulli.

Opgavestillerens Løsning:

1. Skæringspunkterne mellem de modstaaende Sider, hvorigennem Diagonalerne (14), (25) og (36) gaar, betegnes med henh. D, E og F; Skæringspunkterne mellem (14) og (25), (25) og (36), (36) og (14) med A, B og C. Ved at anvende Menelaos' Sætning paa $\triangle ABC$, skaaret af (23) og (56) faas: For (23): $AD \cdot C3 \cdot B2 = CD \cdot B3 \cdot A2$.

*) I den stillede Opgaves Tekst stod der (fejlagtigt) to Diagonaler; O stilleren gør opmærksom paa, at Opgaven i Virkeligheden bliver den

Digitized by Google

For (56): $CD \cdot A5 \cdot B6 = AD \cdot B5 \cdot C6$. Ved Multiplikation af disse to Ligninger faas:

$$A5 \cdot B2 \cdot B6 \cdot C3 = A2 \cdot B3 \cdot B5 \cdot C6. \qquad (1)$$

(Skrives (1) saaledes: $\frac{A5}{A2} : \frac{B5}{B2} = \frac{B3}{B6} : \frac{C3}{C6}$ faar man, at disse Dobbeltforhold er de samme for alle tre Diagonaler; det samme gælder da ogsaa for tre Sider, der ikke har noget Endepunkt fælles). Udtrykkes Størrelserne i (1) ved Sekskantens Sider og Vinkler, idet f. Eks.: $\frac{B2}{\sin(1)} = \frac{B3}{\sin(4)} = \frac{(23)}{\sin B}$ faas:

$$(34)(45)\sin^2(1)\sin(2)\sin(6) = (12)(61)\sin(3)\sin^2(4)\sin(5),$$

der kan skrives som de nedenstaaende to første Forhold:

$$\frac{(12)\sin(4)\sin(5)}{(45)\sin(1)\sin(2)} = \frac{(34)\sin(6)\sin(1)}{(61)\sin(3)\sin(4)} = \frac{(56)\sin(2)\sin(3)}{(23)\sin(5)\sin(6)} = \left[\frac{(12)(34)(56)}{(23)(45)(61)}\right]^{\frac{1}{3}}, \qquad (2)$$

medens det tredie er dannet analogt med de to første, og det sidste ved Multiplikation af de andre.

Da man paa to forskellige Maader kan gennemløbe Sekskanten, nemlig som 125634 og 145236, saaledes at de tre ovenfor betragtede Diagonaler bliver Sider, medens hver Gang tre oprindelige Sider, der ikke har noget Endepunkt fælles, bliver Diagonaler, kan man paa to Maader udlede Relationer af Lign. (2), hvori (14), (25) og (36) indgaar.

For den første af disse Sekskanter skal man i Lign. (2) ombytte 1, 2, 3, 4, 5 og 6 med 1, 2, 5, 6, 3 og 4, hvorved man iagttager, at Vinklerne maa betegnes med de tre Tal, der svarer til de Sider, der danner Vinklen. Derved faas:

$$\frac{(12)\sin(4)\sin(5)}{(36)\sin(3)\sin(6)} = \frac{(34)\sin(6)\sin(1)}{(25)\sin(2)\sin(5)} = \frac{(56)\sin(2)\sin(3)}{(14)\sin(1)\sin(4)} = \left[\frac{(12)(34)(56)}{(14)(25)(36)}\right]^{\frac{1}{3}}. \qquad (3)$$

Den anden Sekskant giver det Resultat, der faas ved at dividere Lign. (3) med (2). Af Ligning (2) og (3) udledes de i Opgaven angivne Forhold.

2. Sættes $(12) = a$, $(23) = b$, $1A = y$, $A6 = x$ og $A5 = z$, har man (se Lign. (5a) og (6a) i min Artikel om de 9 Punkter):

$$\frac{ax}{by} = \frac{z - x}{x} \qquad (1)$$

og

$$z \cdot x = y(y + a). \qquad (2)$$

Da $\triangle ABC$ er ligesidet, faas af $AB = CA$:

$$y + a + b = z + x. \qquad (3)$$

Elimineres z mellem (1) og (3) og mellem (2) og (3) faas:

$$by^2 - 2bxy - ax^2 + b(a + b)y = 0, \qquad (1a)$$

og

Digitized by Google

$$y^2 - xy + x^2 + ay - (a + b)x = 0. \quad (2a)$$

Multipliceres (2a) med b og trækkes fra (1a) faas:

$$(x - b)(by + (a + b)x) = 0. \quad (3)$$

Af (3) og (2a) findes da følgende sammenhørende Værdier af x og y:

1) $x = b,\ y = b$; 2) $x = b,\ y = -a$; 3) $x = 0,\ y = 0$, og

$$x = \frac{b(a+b)^2}{a^2 + 3ab + 3b^2},\ y = -\frac{(a+b)^3}{a^2 + 3ab + 3b^2} = -\left(a + \frac{b^3}{a^2 + 3ab + 3b^2}\right).$$

Medens 2) og 3) svarer til Punkterne 3 og 1, giver 1) og 4) o Løsninger af Sekskanten. Sekskanten svarende til 1) konstrueres ved ›aa Forlængelsen af (21) at afsætte $1A = b$ og gennem A at trække en ›arallel med (14) til Skæring med Cirklen; man faar $(12) \mp (36) \mp (45)$ ›g $(16) \mp (25) \mp (23)$. Sekskanten svarende til 4) konstrueres ›ed paa Forlængelsen af (12) at afsætte $2A' = \frac{b^3}{a^2 + 3ab + 3b^2}$ ›g gennem A' at trække en Parallel med (14) til Skæring med Cirklen. (Er specielt $a = b = r$ (Cirklens Radius) giver 1) en regelmæssig Sekskant og 4) $2A' = \frac{1}{7}r$).

49. Visa att om m är ett helt tal, så är

$$(3 + \sqrt{5})^m = A_m + B_m\sqrt{5},$$

där A_m och B_m äro hela tal, av vilka A_m är det hela tal, som ligger närmast över $B_m\sqrt{5}$. Visa även, att det hela tal, som ligger närmast över $(3 + \sqrt{5})^m$ är divisibelt med 2^m.

Løsning:

Vi sætter $3 + \sqrt{5} = a$ og $3 - \sqrt{5} = b$, hvorefter man har $a^m = A_m + B_m\sqrt{5}$ og $b^m = A_m - B_m\sqrt{5}$ (Binomialformlen). Da $2 < \sqrt{5} < 3$ er $0 < b < 1$, hvoraf følger, at $0 < A_m - B_m\sqrt{5} < 1$; den første Sætning er da bevist. Endvidere følger, at $2A_m = a^m + b^m$ er det hele Tal, der ligger nærmest over a^m.

Lad os antage, at $a^{m-1} + b^{m-1} = 2^{m-1} r_1$, og $a^m + b^m = 2^m \cdot r_2$, hvor r_1 og r_2 er hele Tal. Man har da:

$$(a^m + b^m)(a + b) = 2^m \cdot r_2 \cdot 6 = a^{m+1} + b^{m+1} + ab\,(a^{m-1} + b^{m-1}) =$$
$$a^{m+1} + b^{m+1} + 4 \cdot 2^{m-1} \cdot r_1, \quad \text{altsaa} \quad a^{m+1} + b^{m+1} = 2^{m+1} \cdot r_3.$$

Da den fremsatte Sætning gælder for $m = 1$ og $m = 2$, er den almengyldig.

G. Rasch.

Digitized by Google

50. Eliminer y mellem Ligningerne

$$x^m + x^{m-1}y + x^{m-2}y^2 + \cdots + y^m = a^m,$$
$$x^{2m} + x^{2m-2}y^2 + x^{2m-4}y^4 + \cdots + y^{2m} = b^{2m}.$$

Løsning:

De to Ligninger kan kortere skrives som

$$x^{m+1} - y^{m+1} = a^m x - a^m y \quad \text{og} \quad (x^{m+1})^2 - (y^{m+1})^2 = b^{2m}(x^2 - y^2),$$

af hvilke man igen udleder $a^m(x^{m+1} + y^{m+1}) = b^{2m}(x + y)$. Mellem den første og den sidste af disse Ligninger kan man eliminere y^{m+1} og y; den resulterende Ligning er ikke særlig simpel.

Valdemar Simonsen.

Opgaver til Løsning.

59. Bevis, at en Differens mellem to Kvadrater af Tal med de samme Cifre i modsat Orden er delelig med 99.

(A. M. Bunk.)

60. Bevis Rigtigheden af følgende Konstruktion af Krumningscentret O til Punktet A paa et Keglesnit: Lad Normalen i A skære Brændpunktsaksen i N. Er M det Punkt paa en af Brændstraalerne, hvis Projektion paa Normalen er N, vil Krumningscentret projiceres ind paa Brændstraalen i dette Punkt.

(G. Boldsen.)

61. Givet en indskrivelig Firkant $ABCD$. Bevis, at Summen af Radierne i de Cirkler, der er indskrevet i $\triangle ABC$ og $\triangle ADC$ er lig med Summen af Radierne i de Cirkler, der er indskrevet i $\triangle BCD$ og $\triangle BAD$.

62. Man betragter Ligningen

$$x^4 + 6Ax^2 + 4Bx + C = 0.$$

Find den Relation, som maa finde Sted mellem A, B og C for at Ligningen kan bringes paa Formen

$$\frac{(x-\alpha)^4}{(x-\beta)^4} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Find dernæst Værdien af C, naar $A = -4$, $B = 20$, og løs den tilsvarende Ligning.

Digitized by Google

63. Find den Relation, som maa finde Sted mellem Længerne af Kanterne i et Tetraeder $ABCD$, for at Tangentplanerne i A og B til den omskrevne Kugle kan skære Kanten CD i samme Punkt. — Bevis, at Tangentplanerne i C og D i dette Tilfælde skærer Kanten AB i samme Punkt.

64. Find Summen af Rækken

$$1 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}.$$

Naar $|x| < 1$, skal man finde Grænseværdien af denne Sum, naar n vokser over alle Grænser.

65. Find den mindste Værdi, p kan antage, naar

$$13^p - 1 = m \cdot 53,$$

idet p og m er positive hele Tal.

66. Man skal bestemme en hel, rational Funktion $F(x)$ saaledes, at man identisk har:

$$F(x+2) - 2F(x+1) + F(x) = x.$$

(61—66 efter Journ. de math. él.)

67. Vis, hvorledes man ved Hjælp af den fra Forholdstalsvalgmaaden kendte d'Hondt'ske Fordelingsmetode kan bestemme det største Led paa højre Side i Polynomialformlen

$$(p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_r)^m = \Sigma \frac{m!}{m_1!\, m_2! \cdots m_r!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r},$$

hvor $p_1, p_2, \cdots p_r$ alle er positive Tal, og $m_1, m_2, \cdots m_r$ alle er positive hele Tal, hvis Sum er lig m.

68. I en Pose findes s_1 røde, s_2 hvide, s_3 blaa $\cdots$ s_r grønne Kugler. Man trækker af Posen ialt n Kugler, idet en udtrukken Kugle, naar Farven er noteret, lægges ned i Posen og blandes med de øvrige inden den næste udtrækkes. Hvilken Fordeling efter Farve af de n Kugler er der herved størst Sandsynlighed for at faa?

Eksempel: I Posen findes 100 Kugler, hvoraf 17 røde, 30 hvide og 53 blaa, og der trækkes 10 Kugler.

(67—68 af H. Cl. Nybølle.)

Digitized by Google

OPGAVER FOR GYMNASIEELEVER

og for Elever paa Seminarier og Adgangshold til Polyteknisk Læreanstalt.

---

17. I det Øjeblik en Cyklist netop har indhentet en Fodgænger, der begge bevæger sig for nordgaaende paa en Vej, hvis Retning er stik Nord-Syd, ses nøjagtig mod Vest to Vindmøller, A og B, bag hinanden. Naar de vejfarende efter en vis Tids Forløb gør Holdt, ser Fodgængeren A i Sydvest og B i Vestsydvest, mens Cyklisten ser A i Sydsydvest og B i Sydvest. Hvor mange Gange er Cyklistens Fart større end Fodgængerens? Naar Cyklisten under sit Hvil er fjernet 14 km fra A, hvor stor er da Afstanden fra denne til Vejen?

18. Et Kvadrat er inddelt i 9 mindre Kvadrater. Hvorledes skal de 9 første Tal i Talrækken anbringes i disse Felter, eet Tal i hvert Felt, for at man kan faa samme Sum ud, enten man adderer Tallene i en Række, en Søjle eller en Diagonalrække? x.

19. Find x af Ligningen

$$7\cdot\sqrt{1{,}5x-5}-\sqrt{0{,}2x+45}=7\cdot\sqrt{0{,}625x+3{,}5}.$$

20. Overdelen af et Butiksvindue danner et Cirkelafsnit paa g^0 med vandret Korde. Vinduet er ved $(n-1)$ ækvidistante, lodrette Lister delt i n Dele. Find Buernes Gradtal. Eks. $g^0 = 60^0$; $n = 7$.

21. Bring Udtrykket for

$$\frac{k}{r}=\sqrt{2\pm\sqrt{4-\left(\frac{K}{r}\right)^2}}$$

paa Formen $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$. (20—21 af Halvor Nørregaard.)

22. I en ligebenet Trekant, hvis Vinkel ved Grundlinien er v, trækkes gennem Sidernes Midtpunkter 3 parallele rette Linier, hvis Vinkel med Grundlinien kaldes x. Fra Trekantens Toppunkt nedfældes en vinkelret paa de parallele Linier skærende disse i Punkter P, Q og R i den angivne Orden, saaledes at

$$\frac{PQ}{QR}=\frac{2}{1}.\quad \text{Vis, at}\quad tg\left(x-\frac{v}{2}\right)=tg^3\frac{v}{2}.$$

Digitized by Google

23. Lad Rødderne i Ligningen

$$x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \cdots + nx + n + 1 = 0$$

være $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. Find Værdien af Produktet

$$(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) - \cdots - (1 - \alpha_n).$$

24. Find det geometriske Sted for Centrerne i et System af Cirkler, som alle gaa gennem en given Cirkels Centrum og hvis Radikalakse med den givne Cirkel afskærer af to faste paa hinanden vinkelrette Diametre i den givne Cirkel en Trekant, hvis Areal er $\frac{1}{8}a^2$, naar den givne Cirkels Radius er a.

25. Siden AB i Kvadratet $ABCD$ er en Korde, vinkelret paa X-Aksen, i Parablen $y^2 = px$; BC og AD er parallele med X-Aksen og Punkterne B og C har bestandig positive Koordinater. Find Ligningen for Fællestangenten til den givne Parabel og den Kurve, der beskrives af Vinkelspidsen C.

26. Givet en ret Linie samt to Punkter O og P. Tegn med O som Centrum en Cirkel, der skærer den givne Linie i to Punkter X og Y, saaledes at XY fra P ses under en given Vinkel.

(22—26 af O. A. Smith.)

27. Beregn det lukkede Areal som ligger mellem Kurven $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ og Tangenten til Kurven i det Punkt, hvis Abscisse er 1.

(I. L. W. Jessen.)

28. For hvilke hele og positive p er Udtrykket $\frac{6p + 4}{p - 2}$ et helt Tal?

29. Løs Ligningen

$$(1 + ix)^n + (1 - ix)^n = 0$$

og vis, at alle Rødderne bliver relle. Specielt n ulige.

30. Givet Hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ og Punkterne $A(0, b)$ og $B(0, -b)$. MN er en Korde parallel med Abscisseaksen. Find det geometriske Sted for Skæringspunkt mellem AM og BN.

Digitized by Google

31. Et vilkaarligt Punkt paa en Parabel forbindes med Toppunktet, og gennem Brændpunktet tegnes Linier parallele med henholdsvis Punktets Tangent og Normal. Find de geometriske Steder for Skæringspunkterne mellem den først tegnede og disse to Linier.

32. Et vilkaarligt Punkt paa en Parabel forbindes med Brændpunktet, og gennem Toppunktet tegnes Linier parallele med henholdsvis Punktets Tangent og Normal. Find de geometriske Steder for Skæringspunkterne mellem disse to Linier og den tegnede Brændstraale. (29—32 af J. J. Østergaard.)

* * *

Tidsfristen for Afleveringen af Løsninger til Prisopgaven (Nr. 16 i »Opgaver for Gymnasieelever«) er forlænget til den 1. Oktober d. A.

Digitized by Google

Bibliotek

En Korrelationsformel.

Af P. V. F. Petersen Langmack.

Det hænder ofte, at man har at gøre med en Undersøgelse af, om to Observationsrækker staar i Sammenhørsforhold (Korrelation) til hinanden eller ikke, f. Ex. Vindretningen—Temperaturen, Solpletter—Nordlys etc. Undertiden kan Sammenhørsforholdet være umiddelbart indlysende, men i andre Tilfælde kan der i de enkelte Observationer være saadanne Uregelmæssigheder og tilsyneladende Modsætninger til Stede, at der maa en talmæssig eller talkritisk Undersøgelse til for at afgøre, om der er Korrelation i Talrækkerne eller ikke.

Som et Forsøg i den Retning skal det følgende betragtes.

Lad os betegne de to Observationsrækker saaledes:

$$\text{Den ene: } A_1 - A_2 - A_3 \cdots A_n,$$
$$\text{den anden: } B_1 - B_2 - B_3 \cdots B_n,$$

hvor Størrelserne $A_1 B_1 - A_2 B_2$ o. s. v. hører sammen.

Først tænkes disse to Rækkers μ_2 beregnet saaledes:

$$\begin{aligned}\mu_{2(A)} = \frac{1}{n^2}\big[&(A_1 - A_1)^2 + (A_1 - A_2)^2 + (A_1 - A_3)^2 + \cdots (A_1 - A_n)^2 \\ &+ (A_2 - A_1)^2 + (A_2 - A_2)^2 + (A_2 - A_3)^2 + \cdots (A_2 - A_n)^2 \\ &\vdots \\ &+ (A_n - A_1)^2 + (A_n - A_2)^2 + (A_n - A_3)^2 + \cdots (A_n - A_n)^2\big],\end{aligned}$$

der sammendrages til:

$$\mu_{2(A)} = \frac{2}{n^2}\left(n\,[A^2] - [A]^2\right)$$

og paa samme Maade:

$$\mu_{2(B)} = \frac{2}{n^2}\left(n\,[B^2] - [B]^2\right).$$

Hvert enkelt Led i de to Rækker tænkes nu divideret med henholdsvis $\sqrt{\mu_{2(A)}}$ og $\sqrt{\mu_{2(B)}}$, hvorefter Rækkerne betegnes:

$$A\text{-Rækken: } a_1 - a_2 - a_3 \cdots a_n,$$
$$B\text{-Rækken: } b_1 - b_2 - b_3 \cdots b_n.$$

Disse Tal er nu at betragte som ubenævnte, rene Tal.

Digitized by Google

Som Udtryk for Overensstemmelse — eller Uoverensstemmelse — mellem disse to Talrækker vil vi benytte Middelværdien af to og to sammenhørende Tals Differencers Kvadratsum, altsaa saaledes:

$$d^2 = \frac{1}{n}\left[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 + \cdots (a_n - b_n)^2\right].$$

$$d^2 = \frac{1}{n}\left([a^2] + [b^2] - 2[ab]\right)$$

og denne Størrelse vil vi sammenligne med:

$$\begin{aligned} D^2 = \frac{1}{n^2}\Big[&(a_1 - b_1)^2 + (a_1 - b_2)^2 + (a_1 - b_3)^2 + \cdots (a_1 - b_n)^2 \\ &+ (a_2 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_2 - b_3)^3 + \cdots (a_2 - b_n)^2 \\ &\vdots \\ &+ (a_n - b_1)^2 + (a_n - b_2)^2 + (a_n - b_3)^2 + \cdots (a_n - b_n)^2\Big]. \end{aligned}$$

$$D^2 = \frac{1}{n}\left([a^2] + [b^2] - \frac{2}{n}[a]\cdot[b]\right),$$

som er Middeltallet af Kvadraterne paa alle de Differencer, der overhovedet kan dannes af de to Talrækker, og som altsaa er den sandsynligste Middelværdi, der vil fremgaa af et tilfældigt Sammenhør mellem Tallene i de to Rækker.

Størrelsen $D^2 - d^2$ udtrykker altsaa, hvor meget det givne Sammenhørsforhold er mere (+) eller mindre (—) overensstemmende end det tilfældige.

Men

$$D^2 - d^2 = \frac{2}{n^2}\left(n[ab] - [a]\cdot[b]\right)$$

gaar vi nu tilbage til de oprindelige Størrelser A og B ved heri at indsætte:

$$a = \frac{A}{\sqrt{\mu_{2(A)}}}, \quad b = \frac{B}{\sqrt{\mu_{2(B)}}}$$

og betegne $D^2 - d^2$ ved S (»Sammenhørstallet«), faas:

$$S = \frac{n[AB] - [A]\cdot[B]}{\sqrt{(n[A^2] - [A]^2)(n[B^2] - [B]^2)}}.\text{*)}$$

En nærmere Undersøgelse af denne Formel vil vise, at

*) En analog Formel: $r = \frac{s_{1\cdot 1}}{\sqrt{s_{0\cdot 2}\cdot s_{2\cdot 0}}}$ (= S ovenfor) findes angivet af C. B. Davenport i »Statistical methods« for 1904.

Digitized by Google

Værdien af S ikke forandres ved, at hver enkelt Observation A forøges (eller formindskes) med samme Tal, og heller ikke ved, at Observationerne B — samtidig eller ikke samtidig med A — forøges eller formindskes med et konstant Tal. Ligeedes vil det vise sig, at S ikke forandres ved, at A-erne eller B-erne paa samme Maade multipliceres eller divideres med konstante Tal.

Heraf følger, at det er uden Indflydelse paa S, om Nulpunktet for Observationerne lægges det ene eller det andet Sted, eller om Observationerne udtrykkes i den ene eller den anden Slags Enheder; og endvidere, at man under Bearbejdelsen af Observationsmaterialet kan reducere Tallene ved Subtraktion og Divisjon med passende Tal, hvorved opnaas, at man kommer til at regne med saa smaa Tal som muligt.

Hvis der hersker fuldstændig Overensstemmelse mellem de to Rækker, altsaa saaledes at de er eller kan gøres ens Led for Led ved Subtraktion og Divisjon som nys omtalt, vil man finde $S = 1$ eller, hvis der regnes i »pCt.«, $S = 100$. Og hvis der hersker fuldstændig Uoverensstemmelse mellem de to Rækker, nemlig saaledes som det vilde blive, dersom den ene af to i fuldstændig Overensstemmelse værende Rækker blev »vendt om«, da vil man finde $S = -1$, eller i »pCt.«: $S = -100$.

For nu nærmere at undersøge, hvilken Betydning der kan tillægges et af to Observationsrækker fremgaaet S m. H. t., om dette udtrykker et Sammenhørsforhold i Rækkerne eller ikke, maa man undersøge, *hvilke Variationer* S *overhovedet er underkastet.*

Her maa imidlertid skelnes mellem:

1. De Variationer, der skyldes forskellige mulige Sammenhørstilfælde mellem to Rækker, hvis Led er fejlfri, og
2. De Variationer, der skyldes, at selve Observationerne er behæftede med tilfældige Fejl, hvad de jo forøvrigt altid er i Praksis.

De Variationer, der fremgaar af et ikke fejlfrit Observationsmateriale, maa undersøges særligt i hvert enkelt givet Tilfælde, og der kan ikke siges andet om dem i Almindelighed end, at de vil være større, end man vilde finde dem i et fejlfrit Materiale. Men naar dette er Tilfældet, vil den Korrelation, man søger, og som delvis skjuler sig bag et ikke fejlfrit Materiale, være *bedre* end den, der umiddelbart fremgaar, og man er altsaa paa den sikre Side ved at regne med den sidste.

Digitized by Google

Vi vil derfor i det følgende se bort fra tilfældige Fejl i Observationsrækkerne og kun holde os til saadanne, der i Henhold til, hvad der nys blev omtalt m. H. t. at forandre Leddene ved Subtraktion og Divisjon, kan bringes f. Eks. til at være Tallene i den naturlige Talrække.

Vi tænker os altsaa de to Rækker:

$$A\text{-Rækken: } 1 - 2 - 3 - 4 \cdots n$$
$$B\text{-Rækken: } 1 - 2 - 3 - 4 \cdots n$$

stillet overfor hinanden saaledes, at den ene holdes uforandret, medens den andens Led permuteres paa alle mulige Maader. Nu bliver

$$[A] = [B] = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$[A^2] = [B^2] = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$[A]^2 = [B]^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

og man faar da:

$$S = \frac{n\,[AB] + \frac{n^2(n+1)^2}{4}}{n \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{4}} = \frac{[AB]}{\frac{(n-1)n(n+1)}{12}} - 3\,\frac{n+1}{n-1}.$$

Dersom nu Rækkerne tages sammen saaledes, at der er fuldstændig Overensstemmelse, altsaa saaledes som de nys er opskrevne, bliver

$$[AB] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots n \cdot n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

og man finder som før nævnt $S = 1$ eller 100 pCt.

Men vendes den ene Række om, bliver

$$[AB] = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) = 3 \cdot (n-2) \cdots n \cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

og nu findes $S = -1$ eller $-$ 100 pCt.

For nu at bestemme de Variationer, S er underkastet, naar Antallet af Led i Rækkerne er n, vil vi først beregne »Halvinvarianterne«*) for Størrelsen $[AB]$.

*) Thiele: Theory of observations. København 1903.

Til Belysning af Fremgangsmaaden m. m. vil vi opstille de to let overskuelige Rækker for $n = 3$.

A-Rækken	B-Rækken						$[AB]$					
1	1	2	1	3	2	3	1·1	1·2	1·1	1·3	1·2	1·3
2	2	1	3	1	3	2	2·2	2·1	2·3	2·1	2·3	2·2
3	3	3	2	2	1	1	3·3	3·3	3·2	3·2	3·1	3·1

Sum $s_1 = 14 + 13 + 13 + 11 + 11 + 10 = 72$

Kvadratsum $s_2 = 196 + 169 + 169 + 121 + 121 + 100 = 876.$

Det ses, at A-Rækken er holdt uforandret, medens B-Rækken er opført paa de $P_3 = 6$ Maader, hvorpaa 3 Led kan permuteres. Dernæst er de to Rækker multiplicerede Led for Led, og Summen $s_1 = 72$ og Kvadratsummen $s_2 = 876$ beregnet.

Man finder nu for $[AB]$

$$\mu_0 = s_0 = P_3 = 6,$$

$$\mu_1 = \frac{s_1}{s_0} = \frac{72}{6} = 12,$$

$$\mu_2 = \frac{s_2}{s_0} - \mu_1^2 = 2.$$

Naar Antallet af Rækkernes Led er n, findes for $[AB]$

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= P_n, \\ s_1 &= P_n \frac{n(n+1)^2}{4}, \\ s_2 &= P_n \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \cdot \frac{9n^2 + 19n + 8}{36} \end{aligned}\right\} \text{(se S. 98—103).}$$

og heraf findes endvidere for $[AB]$

$$\mu_0 = s_0 = P_n,$$

$$\mu_1 = \frac{s_1}{s_0} = \frac{n(n+1)^2}{4},$$

$$\mu_2 = \frac{s_2}{s_0} - \mu_1^2 = \frac{(n-1)\,n^2\,(n+1)^2}{144}$$

og da $S = \dfrac{[AB]}{\dfrac{(n-1)\,n\,(n+1)}{12}} - 3\,\dfrac{n+1}{n-1}$, findes Halvinvarianterne for S:

Digitized by Google

$$\mu_0 = P_n,$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1 = \dfrac{\dfrac{n(n+1)^2}{4}}{\dfrac{(n-1)\,n\,(n+1)}{12}} - 3\,\dfrac{n+1}{n-1} = 0, \\[2ex] \mu_2 = \dfrac{\dfrac{(n-1)\,n^2\,(n+1)^2}{144}}{\left(\dfrac{(n-1)\,n\,(n+1)}{12}\right)^2} = \dfrac{1}{n-1}. \end{array}\right\} \text{*) og **)}$$

Altsaa: alle de mulige P_n Værdier af S svinger omkring 0 med en Middelafvigelse:

$$m_{(S)} = \sqrt{\mu_{2(S)}} = \pm\sqrt{\frac{1}{n-1}},$$

hvilket altsaa vil sige, at hvis Leddene i de to Rækker var sammenstillede tilfældigt, f. Ex. ved Lodtrækning, var der størst Sandsynlighed for at faa en Værdi af S i Nærheden af 0, og saaledes at der efter Fejlloven vilde være en Sandsynlighed af ca. 2 mod 1 for, at Afvigelserne ikke vilde overstige Brøken $\pm\sqrt{\frac{1}{n-1}}$.

For at bedømme, om der er Korrelation til Stede eller ikke, maa Størrelserne S og m sammenlignes. Man bestemmer derfor et Tal, som vi vil kalde »Korrelationstallet«:

$$K = \frac{S}{m}.$$

Er nu $K < 1$, er Resultatet ikke bedre, end det kunde ventes ved Lodtrækning, og der er ringe Sandsynlighed for Tilstedeværelse af Korrelation. Er $K > 1$, er Sandsynligheden for Korrelation til Stede, og denne stiger med voksende K.

*) Idet, som bekendt, naar $x = \frac{p}{q} + r$, saa er

$$\mu_{1(x)} = \frac{\mu_{1(p)}}{q} + r,$$

$$\mu_{2(x)} = \frac{\mu_{2(p)}}{q^2}.$$

**) Angaaende de højere μ-er bemærkes, at de ulige $\mu_3 - \mu_5$ etc. alle bliver 0; μ_4 bliver negativ og stærkt aftagende mod 0, naar n vokser. Kurven for S er altsaa symmetrisk, men — i Sammenligning med den eksponentielle Fejlkurve — lidt »fladtrykt«.

Digitized by Google

Foreligger der imidlertid kun et enkelt Forsøg (med to Observationsrækker), vil man i Almindelighed kræve $K > 3$, før man nogenlunde trygt tør stole paa, at der er Korrelation mellem de to Talrækker.

Haves der flere Forsøg, vil Størrelsen K betinge, hvor hvert enkelt af disse har sin Plads indenfor de ved den almindelige Fejlkurve afstukne Grænser. Denne Kurve er tegnet nedenfor — (den fuldt optrukne) — og dens Felter er jo saaledes at forstaa, at naar hele det af Kurven indesluttede Areal er 100, saa vil hvert af de Felter, der er afgrænset ved Tallene:

$$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4$$

have Arealer, hvis Størrelse er angivet ved de i Kurvens Felter skrevne Tal, altsaa henholdsvis:

0,2 2,1 13,6 34,1 34,1 13,6 2,1 0,2.

Men disse Tal angiver tillige, hvor mange af 100 Forsøg der vil falde mellem de angivne Grænser, hvis Forsøgsresultaterne følger Tilfældighedernes Lov, »Fejlloven«, f. Ex. hvis de var fremkomne ved, at det ved Lodtrækning var bleven afgjort, hvorledes de enkelte Led i A- og B-Rækkerne skulde høre sammen.

Lad os nu tænke os, at vi har to Grupper Forsøg med henhv. 20 og 22 enkelte Forsøg, for hvilke Størrelserne:

$$n - S - m - K$$

er fundne som ovenfor angivet og har faaet de Værdier, der er opførte i efterfølgende Tabel.

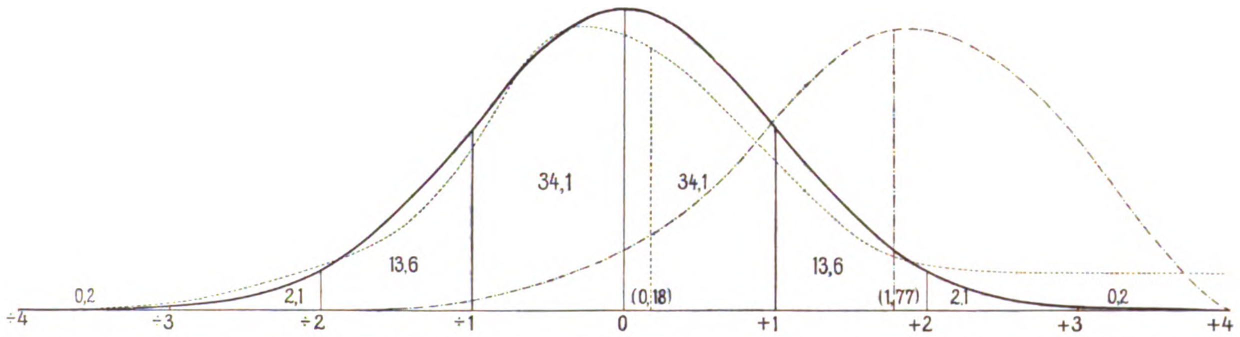
Naar vi nu anbringer hvert enkelt af disse Forsøg paa den Plads, som Tallene K betinger, vil de falde som angivet i det Skema, der er opført under Kurven ovenfor, altsaa vil f. Ex. Forsøg Nr. 2 i 1ste Gruppe, hvor $K = 0{,}60$, faa sin Plads i Feltet mellem 0 og + 1; Forsøg Nr. 16, hvor $K = -1{,}33$, vil falde i Feltet mellem — 1 og — 2 o. s. v. Disse Forsøgsnumre er — som det vil ses — i det nys nævnte Skema sat i ( ).

Paa denne Maade kommer der til at ligge følgende Antal af Forsøgene i de forskellige Felter:

1ste Gruppe

med 20 enkelte Forsøg:	0 —	1 —	2 —	7 —	6 —	2 —	1 —	1,
eller omregnet paa 100:	0 —	5 —	10 —	35 —	30 —	10 —	5 —	5.
Men efter Fejlloven skulde der falde:	0 —	2 —	14 —	34 —	34 —	14 —	2 —	0.
Forskel:	0 +	3 —	4 +	1 —	4 —	4 +	3 +	5.

Digitized by Google



1. Gruppe:								
Forsøgene Nr. . . .	—	(11)	(16)(19)	(4)(5)(6)(10) (14)(17)(20)	(1)(2)(3) (7)(12)(18)	(8)(15)	(9)	(13)
Antal Forsøg	0	1	2	7	6	2	1	1
Omregnet paa 100 .	0	5	10	35	30	10	5	5
Efter Fejlloven . . .	0	2	14	34	34	14	2	0
2. Gruppe:								
Forsøgene Nr. . . .	—	—	—	(8)	(12)(15)(18)	(1)(2)(6)(9) (10)(11)(16) (21)	(4)(5)(7)(13) (14)(17)(19) (20)	(3)(22)
Antal Forsøg	0	0	0	1	3	8	8	2
Omregnet paa 100 .	0	0	0	5	14	36	36	9
Efter Fejlloven . . .	0	2	14	34	34	14	2	0

Digitized by Google

Forsøg Nr.	1ste Gruppe n	m	S	K	2den Gruppe n	m	S	K
1	37	16.7	0.17	0.01	72	11.9	17.02	1.43
2	101	10.0	6.00	0.60	48	14.6	23.36	1.60
3	82	11.1	7.77	0.70	30	18.6	59.89	3.22
4	15	26.7	÷ 18.86	÷ 0.71	15	26.7	77.43	2.90
5	6	44.7	÷ 39.78	÷ 0.89	30	18.6	53.75	2.89
6	26	20.0	÷ 11.20	÷ 0.56	6	44.7	67.05	1.50
7	28	19.2	6.34	0.33	66	12.4	24.92	2.01
8	90	10.6	15.16	1.43	42	15.6	÷ 5.15	÷ 0.33
9	12	30.2	70.06	2.32	25	20.4	36.11	1.77
10	5	50.0	÷ 1.50	÷ 0.03	8	37.8	61.61	1.63
11	10	33.3	÷ 70.26	÷ 2.11	13	28.9	48.26	1.67
12	38	16.4	14.76	0.90	60	13.0	8.19	0.63
13	20	22.9	71.67	3.13	36	16.9	40.73	2.41
14	65	12.5	÷ 3.75	÷ 0.30	23	21.3	44.73	2.10
15	7	40.8	65.28	1.60	12	30.2	0.60	0.02
16	30	18.6	÷ 24.74	÷ 1.33	7	40.8	72.62	1.78
17	42	15.6	÷ 0.16	÷ 0.01	54	13.7	34.66	2.53
18	17	25.0	0.50	0.02	32	18.0	5.94	0.33
19	18	24.3	÷ 35.48	÷ 1.46	16	25.8	58.57	2.27
20	8	37.8	÷ 0.76	÷ 0.02	16	25.8	57.79	2.24
21	—	—	—	—	50	14.3	17.59	1.23
22	—	—	—	—	20	22.9	68.93	3.01
Gsnt:	—	—	—	0.18	—	—	—	1.77

Forskellen mellem den fundne Fordeling og den, der med størst Sandsynlighed vilde være at vente, gaar altsaa i de forskellige Felter snart i den ene og snart i den anden Retning, og den Kurve, der angiver den fundne Fordeling, og som er tegnet punkteret, ses da ogsaa at slynge sig saaledes om Fejlkurven, at dens Areal i det væsentligste falder sammen med Fejlkurvens Areal.

Med andre Ord: Resultatet i den første Gruppe Forsøg er ikke bedre, end det kunde ventes ved Lodtrækning; der er ingen Korrelation til Stede.

Med saaledes stiller Sagen sig ikke for de 22 Forsøg i

2den Gruppe.

Forsøgene falder saaledes i Felterne:	0 — 0 — 0 — 1 — 3 — 8 — 8 — 2,
eller omregnet paa 100:	0 — 0 — 0 — 5 — 14 — 36 — 36 — 9.
Men efter Fejlloven skulde der falde:	0 — 2 — 14 — 34 — 34 — 14 — 2 — 0.
Forskel:	0 — 2 — 14 — 29 — 20 + 22 + 34 + 9.

Digitized by Google

Her gaar Fordelingen af Forsøgene aldeles bestemt i positiv Retning, og Kurven for denne Fordeling, der er tegnet stiplet, ligger med sit Areal i høj Grad til højre for Fejlkurvens Areal. I denne Forsøgsgruppe er der altsaa Korrelation til Stede.

Hvis vi i Stedet for at lægge de enkelte Forsøg ind i Fejlkurvens Felter, saaledes som det er gjort ovenfor, simpelthen afsætter hvert enkelt K henad Fejlkurvens Grundlinje, vil det geometriske Midtpunkt for disse Tal vise, hvorledes de to Kurvers Arealer ligger i Forhold til hinanden. Dette geometriske Midtpunkt er bestemt ved Gennemsnitstallet af de til en Gruppe Forsøg hørende K, hvilket er opført i Tabellen ovenfor, og hvor der for 1ste Gruppe haves $+ 0.18$ og for 2den Gruppe $+ 1.77$.

Jo større dette Gennemsnitstal er, desto større Korrelation er der. Ligger Tallet mellem 0 og 1 er der ingen eller kun svag Korrelation; er det derimod større end $+ 1$ er der tydelig Korrelation, og desto tydeligere, jo større Tallet er.

Bliver Gennemsnitstallet for K i en Forsøgsgruppe negativt, er der ogsaa svagere eller stærkere Korrelation til Stede som nys nævnt, men Korrelationen er da af modsat Art af det, man gik ud fra.

Vi benyttede ovenfor (Side 93), at

$$s_{1(AB)} = P_n \cdot \frac{n(n+1)^2}{4}$$

og at

$$s_{2(AB)} = P_n \cdot n^{3} \cdot \frac{9n^2 + 19n + 8}{36}.$$

Rigtigheden heraf skal nu bevises.

Hvad først Udtrykket for $s_{1(AB)}$ angaar, da ses det let, ved at kaste et Blik paa de for $n = 3$ (Side 93) opstillede Søjler, at i øverste Linje staar Tallet 1 i B-Rækken saa ofte, som de øvrige $n - 1$ Tal kan permuteres, altsaa P_{n-1} Gange, og da det samme gælder hvert af de øvrige Tal, saa vil Værdien af hele øverste Linje i AB være:

$$1 \cdot P_{n-1} \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots n) = 1 \cdot P_{n-1} \cdot n \; .$$

Digitized by Google

Paa samme Maade vil Værdien af næstøverste Linje i $|AB|$ være: $2 \cdot P_{n-1} \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots n) = 2 \cdot P_{n-1} \cdot |n|$ o. s. v. og hele Værdien af alle Linjer i $|AB|$ bliver altsaa:

$$s_{1(AB)} = P_{n-1} \cdot |n| \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots n) = P_{n-1} \cdot |n|^2 = P_n \frac{n(n+1)^2}{4}.$$

Udtrykket for $s_{2(AB)}$ falder betydeligt sværere.

De Side 93 opførte Søjler skal jo kvadreres, og Kvadraterne derefter adderes. I den Hensigt vil vi nu, med Henblik paa, at Leddenes Antal er n, opstille et Par af de i Betragtning kommende Permutationer (se de indrammede Tal).

1 ·	1 ·	1 ·	1	= 1
2 ·	2 ·	2 ·	2	= 16
3 ·	3 ·	3 ·	3	= 81
4 ·	4 ·	4 ·	4	= 256
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$(n-1)$	$(n-1)$	$(n-1)$	$(n-1)$	⋮
n ·	n ·	n ·	n	⋮
1 ·	1 ·	2 ·	2	= 8
1 ·	1 ·	3 ·	3	= 18
1 ·	1 ·	4 ·	4	= 32
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1 ·	1 ·	n ·	n	⋮
2 ·	2 ·	3 ·	3	= 72
2 ·	2 ·	4 ·	4	= 128
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2 ·	2 ·	n ·	n	⋮
3 ·	3 ·	4 ·	4	= 288
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3 ·	3 ·	n ·	n	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$(n-1)$	$(n-1)$ ·	n ·	n	⋮

$(1 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + (3 \cdot 3)^2 + (4 \cdot 4)^2 = 900$

	1 ·	1 ·	1 ·	1	= 1
	2 ·	4 ·	2 ·	4	= 64
	3 ·	2 ·	3 ·	2	= 36
	4 ·	3 ·	4 ·	3	= 144
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n ·	$n-1$ ·	n ·	$(n-1)$	= ⋮
2 ·	1 ·	1 ·	2 ·	4	= 16
2 ·	1 ·	1 ·	3 ·	2	= 12
2 ·	1 ·	1 ·	4 ·	3	= 24
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2 ·	1 ·	1 ·	n ·	$(n-1)$	⋮
2 ·	2 ·	4 ·	3 ·	2	= 96
2 ·	2 ·	4 ·	4 ·	3	= 192
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2 ·	2 ·	4 ·	n ·	$(n-1)$	⋮
2 ·	3 ·	2 ·	4 ·	3	= 144
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2 ·	3 ·	2 ·	n ·	$(n-1)$	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2 ·	$(n-1)$	$(n-2)$ ·	n ·	$(n-1)$	⋮

$(1 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 4)^2 + (3 \cdot 2)^2 + (4 \cdot 3)^2 = 729$

(Ialt kan der foretages Pn saadanne Opstillinger).

Det vil formentlig ikke være vanskeligt at se, at naar de indrammede Søjler, som jo er dem, der skal kvadreres, opstilles saaledes ved Siden af og under hinanden, med Tilføjelse af Faktoren 2, saa vil Kvadreringen af de n Led (hvert be-

Digitized by Google

staaende af to Faktorer) være udført, idet der foroven (ved Siden af de indrammede Søjler) findes Kvadraterne paa de enkelte Led, og forneden det dobbelte Produkt af alle Leddene tagne to og to paa alle mulige Maader.

Vi vil nu lægge Mærke til, at der herved opstaar fire — og kun fire — forskellige Arter af Størrelser.

1ste Art er dem, der har Formen:

$$(1 \cdot 1)^2 - (2 \cdot 2)^2 - (3 \cdot 3)^2 \cdots (n \cdot n)^2 \quad \text{eller} \quad 1^4 - 2^4 - 3^4 \cdots n^4,$$

ialt n forskellige Størrelser.

2den Art har Formen:

$$1^2 \cdot 2^2 - 1^2 \cdot 3^2 \cdots 2^2 4^2 \cdots p^2 q^2 \cdots (n-1)^2 n^2.$$

Det ses formentlig let, at af dem er der $Kn, 2$.

3die Art har Formen:

$$1^2 \cdot 2 \cdot 3 - 1^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdots p^2 \cdot q \cdot r \cdots n^2 (n-1)(n-2).$$

Da hvert af de n Tal kvadreres og forbindes med to og to forskellige af de øvrige $n - 1$ Tal, bliver der ialt $n \cdot K_{n-1}, 2$ forskellige Størrelser af denne Art.

4de Art er dem, der har Formen:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p \cdot q \cdot r \cdot s \cdots (n-3)(n-2)(n-1)n,$$

altsaa $Kn, 4$ forskellige Størrelser ialt.

Det gælder nu om at bestemme, hvor mange Gange hver enkelt Størrelse inden for hver Art forekommer.

Størrelserne af 1ste Art kan kun opstaa ved Kvadrering af de enkelte Led. Lad os betragte én af dem f. Ex. $(1 \cdot 1)^2$. Denne kan kun findes i øverste Linje i de Side 99 opstillede Permutationer, og indenfor den indrammede Søjle saa ofte i øverste Linje, som de øvrige $n - 1$ Led kan ombyttes, altsaa P_{n-1} Gange. Det samme gælder $(2 \cdot 2)^2$, der kun kan findes i 2den Linje o. s. v. Men naar hver af Størrelserne forekommer P_{n-1} Gange, bliver hele Antallet af Størrelserne af 1ste Art: $n \cdot P_{n-1} = P_n$.

Størrelserne af 2den Art kan opstaa baade ved Kvadrering af samme Led og ved Multiplikation af forskellige Led inden for samme indrammede Søjle. Lad os betragte én af dem, f. Ex. $1^2 \cdot 2^2$. Denne Størrelse kan kun opstaa af Søjleleddene:

Digitized by Google

$$\begin{array}{llll}
1\cdot 2 & 1\ — & 1\cdot 1 & 1\cdot 2 \\
2\ — & 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \\
3\ — & 3\ — & 3\ — & 3\ — \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n & n & n & n
\end{array}$$

Af disse fire Opstillinger giver de to første hver især Størrelsen $1^2 \cdot 2^2$ èn Gang ved Kvadrering, og da hver af dem forekommer saa ofte, som $n - 1$ Led kan ombyttes indbyrdes, bliver Antallet her ialt $2 \cdot P_{n-1}$.

De to sidste Opstillinger giver hver især Størrelserne $1^2 \cdot 2^2$ to Gange ved Multiplikation af Leddene i samme indrammede Søjle, og da hver af dem forekommer saa ofte, som $n - 2$ Led kan ombyttes indbyrdes, bliver Antallet $2 \cdot 2 \cdot P_{n-2}$.

Hele Antallet af Størrelsen $1^2 \cdot 2^2$ bliver altsaa:

$$2 \cdot P_{n-1} + 2 \cdot 2 \cdot P_{n-2} = 2(n + 1) P_{n-2}.$$

Da det samme gælder hver enkelt af Størrelserne af 2den Art, bliver hele Antallet af disse:

$$2 \cdot (n + 1) P_{n-2} \cdot K n, 2 = (n + 1) P_n.$$

Størrelserne af 3die Art kan kun opstaa ved Multiplikation. Lad os betragte en af dem, f. Ex. $1 \cdot 2 \cdot 3^2$. Denne kan kun findes i de 3 øverste Linjer af de Side 99 opstillede Permutationer og fremgaar af følgende Opstillinger:

$$\begin{array}{llll}
1\cdot 2 & 1\ — & 1\cdot 3 & 1\ — \\
2\ — & 2\cdot 1 & 2\ — & 2\cdot 3 \\
3\cdot 3 & 3\cdot 3 & 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \\
4\ — & 4\ — & 4\ — & 4\ — \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n & n & n & n
\end{array}$$

Hver af disse Opstillinger giver Størrelsen $1 \cdot 2 \cdot 3^2$ to Gange, og hver af dem forekommer saa ofte som $n - 2$ Led kan ombyttes indbyrdes, altsaa ialt $2 \cdot 4 \cdot P_{n-2}$, og da det samme gælder hver af Størrelserne af 3die Art, bliver hele Antallet

$$2 \cdot 4 \cdot P_{n-2} \cdot n \cdot K_{n-1}, 2 = 4(n - 2) \cdot P_n.$$

Størrelserne af 4de Art kan ligeledes kun opstaa ved Multiplikation af Leddene indenfor en Søjle. Lad os betragte én af dem, f. Ex. Størrelsen: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.

Digitized by Google

Denne kan kun fremgaa af følgende Opstillinger af de Side 99 indrammede Søjler:

1·2	1·2	1·3	1·3	1·4	1·4	1 —	1 —	1 —	1 —	1 —	1 —
2 —	2 —	2·4	2 —	2·3	2 —	2·1	2·1	2·3	2·4	2 —	2 —
3·4	3 —	3 —	3 —	3 —	3·2	3·4	3 —	3 —	3·1	3·1	3·2
4 —	4·3	4 —	4·2	4 —	4 —	4 —	4·3	4·1	4 —	4·2	4·1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n

Disse 12 Opstillinger giver hver især Størrelsen $1\cdot2\cdot3\cdot4$ to Gange, og altsaa forekommer denne ialt 24 Gange. Men da hver af disse Opstillinger forekommer saa ofte, som $n-2$ Led kan ombyttes, altsaa ialt P_{n-2} Gange, saa forekommer Størrelsen $1\cdot2\cdot3\cdot4$ ialt $P_4\cdot P_{n-2}$ Gange.

Det samme gælder hver af de andre Størrelser af 4de Art, og hele Antallet af dem bliver:

$$P_4\cdot P_{n-2}\cdot K_{n,4} = P_n(n-2)(n-3).$$

Da det er umiddelbart indlysende, at hele Antallet af alle Størrelser af de 4 Arter maa være $n^2\cdot P_n$, faar man en Kontrol paa Rigtigheden af det foregaaende ved at lægge de 4 fundne Antal sammen:

1ste Art. 2den Art. 3die Art. 4de Art.

$$P_n + (n+1)P_n + 4(n-2)P_n + (n-2)(n-3)P_n = n^2 P_n.$$

Efter at vi nu har fundet, i hvilket Antal hver enkelt af de forskellige Størrelser inden for de 4 forskellige Arter forekommer, gælder det om at opsummere Rækkerne, altsaa at finde:

for 1ste Art Summen af:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots n^4,$$

for 2den Art Summen af:

$$1^2\cdot2^2 + 1^2\cdot3^2 + \cdots p^2\cdot q^2 + \cdots (n-1)^2 n^2,$$

for 3die Art Summen af:

$$1^2\cdot2\cdot3 + 1^2\cdot2\cdot4 + \cdots p^2\cdot q\cdot r + \cdots n^2(n-1)(n-2),$$

for 4de Art Summen af:

$$1\cdot2\cdot3\cdot4 + 1\cdot2\cdot3\cdot5 + \cdots p\cdot q\cdot r\cdot s + (n-3)(n-2)(n-1)n.$$

Digitized by Google

Da hver af disse Summer vil vise sig at have den Egenskab, at den ved fortsat Differentiation ender i en konstant Differens, kan Opsummeringen af dem ske efter Reglerne for Summeringen af sammensatte Differensrækker, hvilke findes angivne i de matematiske Lærebøger, f. Ex. i Adolph Steens: »Ren Mathematik«.

Her skal ikke fremsættes de vidtløftige her hen hørende Udregninger, men blot gengives Resultatet for hver enkelt Række, altsaa:

for 1ste Art:

$$\frac{(n+1)n(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

for 2den Art:

$$\frac{(n+1)n(n-1)(2n+1)(2n-1)(5n+6)}{360},$$

for 3die Art:

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(30n^3+35n^2-11n-12)}{720},$$

for 4de Art:

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(15n^3+15n^2-10n-8)}{5760}.$$

Endnu staar tilbage at multiplicere hvert af disse Udtryk med de foran angivne Antal, hvori hver enkelt Størrelse af den paagældende Art forekommer, og som tidligere er fundet at være: for 1ste Art: P_{n-1}, for 2den Art: $2(n+1)P_{n-2}$, for 3die Art: $8 \cdot P_{n-2}$, og for 4de Art: $P_4 \cdot P_{n-2}$.

Naar disse Multiplikationer udføres, og det hele derefter sammentrækkes, faar man:

$$s_2 = P_n \cdot n^2 \cdot \frac{9n^2+19n+8}{36},$$

som netop er den Værdi for s_2, der er benyttet Side 93, $(q \cdot e \cdot d)$.

Digitized by Google

Relationen mellem Antallet af Bjerge, Dale, Pas og Søer.

Af Carl van Deurs.

Paa en topografisk Flade mærker vi os de Punkter, hvor Tangentplanen er vandret. Der er to Slags, efter som Tangentplanen i Nærheden af Røringspunktet skærer Fladen eller ikke. I første Tilfælde bestaar Skæringspunktet af flere Grene, som skærer hverandre i samme Punkt; vi ser bort fra de Tilfælde, hvor disse Grenes Antal er forskelligt fra 2 som usandsynligt i Naturen. Punktet kalder vi Pashøjde eller Pas. I det andet Tilfælde er Punktet Toppen af en Høj eller Bunden af en Dal, i det vi ser bort fra det Tilfælde, hvor Røring finder Sted langs en Kurve i Tangentplanen. Som fælles Betegnelse for Højde- og Dybdepunkt benytter vi »Kuppelpunkt«.

En Ø ligger i Havet, hvis Vandspejl vi betegner ved H. Vi tænker os Øen dukke op af Havet eller Havet, som først dækker den, synke ned til Stillingen H. Først fremtræder en Høj over Havet som en Ø, derpaa flere, én hver Gang en Top passeres; naar et Pas passeres, forenes to Stykker Land; enten vokser derved to Øer sammen til én, eller Enderne af en hesteskoformet Ø naar sammen og danner en ringformet Ø med en Sø i Midten, som bliver staaende, medens Vandet udenom synker videre. I første Tilfælde formindskes Øernes Antal med 1, i sidste Tilfælde bliver det uforandret. Dette Tilfælde indtræder, naar Vandfladen passerer det sidste af Passene omkring en Sø. Antallet af Øer formindskes altsaa med Antallet af Pas ÷ Antallet af Søer, $P - S$; det forøges med Antallet af Høje, som er alle de blottede Kuppelpunkter, i det Dalpunkterne jo ikke blottes. Tallet paa Kuppelpunkterne kaldes K. Naar Vandspejlet er sunket til H, er der i det hele dannet 1 Ø; og man har altsaa

$$K - (P - S) = 1$$

eller

$$K + S - P = 1. \tag{1}$$

For i det følgende lettere at fastholde, at det Pas, som ligger i Kanten af hver Sø, skal medregnes til P, vil vi i det

Digitized by Google

følgende tænke os Søens Vandspejl sænket lidt under Passet, saa at dette fremtræder paa tørt Land.

Hver Sø, d. v. s. det Legeme, der dannes af dens Vand, kan da betragtes som en omvendt Ø; for denne gælder det samme som for en almindelig Ø, idet vi blot maa regne med omvendte Søer, hvor Tyngdekraften virker opad, altsaa $K + S - P = 1$; i Stedet for i Ligningen ovenfor at tælle Søen med kan man altsaa tælle de deri liggende Kuppelpunkter og omvendte Søer og trække Passene fra; venstre Side af Ligning (1) bliver da igen $K + S - P$; men nu er Søernes Kuppelpunkter, omvendte Søer og Pas medregnede i K, S og P. Paa samme Maade erstatter man de omvendte Søer, der er lige som rette Øer, med Kuppelpunkter, rette Søer og Pas o. s. v., indtil ingen Søer er tilbage. Man har da

$$K - P = 1 \tag{2}$$

gældende for alle Kuppelpunkter og Pas paa den tørlagte Ø.

Paa denne kan atter de Søer lægges ind, som virkelig findes. For hver Sø forsvinder et Antal Kupler og Pas, hvorom gælder $K - P = 1$. Vi kan altsaa paa Ligning (2)'s venstre Side borttage de i Søen liggende Kupler og Pas, naar vi til Gengæld tæller Søen med; Ligningen bliver da til

$$K - P + S = 1 \tag{3}$$

gældende for alle Kupler, Pas og Søer paa Øen. Naar en Sø har Afløb over det laveste af de Pas, som omgiver den, skal dette Pas regnes med

Vil man for et hvilket som helst afgrænset Stykke Land danne lignende Formler som for Øen, kan man omskrive Stykket med en Cylinderflade med lodrette Frembringere og lægge Havet om denne Flade, saa at der dannes en Ø, der har alle Fladens Kuppelpunkter og Pas men tillige som Kuppelpunkter alle Kystprofilets Højde- og Dybdepunkter. Idet disse sidste Punkters Antal kaldes k, har man altsaa for den tørre Flade

$$K + k - P = 1 \tag{4}$$

og for Fladen med Søer

$$K + k + S - P = 1. \tag{5}$$

Digitized by Google

Endelig vil vi danne Formler for hele Jordoverfladen. Vi tænker os denne tørlagt ved Havets Sænkning. Lige før Tørlægningens Fuldendelse bestaar der kun 1 Sø. Landet kan da betragtes som en Ø, for hvilken gælder $K = P + 1$.

Naar Søen forsvinder, vokser K med 1, uden at der sker nogen Forandring i de øvrige Tal; man har herefter

$$K = P + 2$$

eller

$$K - P = 2. \qquad (6)$$

Vi vil prøve dette Resultats Rigtighed ved et Eksempel. Omskrives en Kugle med et regelmæssigt Polyeder, bliver dettes Hjørner Høje, Sidefladernes Røringspunkter med Kuglefladen Dale og Kanternes Midtpunkt Pas. Ligning (6) i sin første Form giver da:

Antal af Hjørner + Sideflader = Antal af Kanter + 2,

stemmende med Eulers Sætning.

Paa den tørre Klode kan atter Søerne lægges ind; da deres Antal er lig Antallet af bortgaaende Kupler ÷ bortgaaende Pas, faas

$$K - P + S = 2,$$

hvor K og P er Antallet af Kupler og Pas paa Land, S Antallet af Søer og Hav; da Havet er 1, faas, naar S betegner Antallet af egentlige Søer:

$$K - P + S = 1. \qquad (7)$$

Prisopgave I 1919.

Post festum.

Af Lektor P. A. Larsen.

Det er maaske gaaet flere, som det gik mig: jeg havde ogsaa løst denne interessante Opgave, men undladt at indsende Besvarelsen. Dels kunde jeg daarligt finde Tid til at udarbejde Løsningen i en saadan Form, at den egnede sig til at komme paa Tryk, og dels var jeg lidt bange for, at der bag

Digitized by Google

Tekstens Ord »fuldstændig« skulde skjule sig en eller anden Finesse fra den »moderne« Elementærgeometri, som jeg føler mig mindre fortrolig med. — Da imidlertid mit Udtryk for den i Opgavens 2den Del søgte Betingelse har en anden, mere geometrisk, Form end i de fremkomne Løsninger, vil dette maaske dog have Interesse for Tidsskriftets Læsere.

Forat en Firkant skal have mere end ét indskrevet Kvadrat er det nødvendigt og tilstrækkeligt, at Diagonalernes Vinkel er ret og halveres af Linien til to modstaaende Siders Skæringspunkt.

Løsningen var i Hovedtrækkene følgende:

1⁰ Naar Siderne i to Kvadrater $K_1L_1M_1N_1$ og $K_2L_2M_2N_2$ (i samme Omløbsretning) skærer hinanden, K_1L_1 og K_2L_2 i A_1, L_1M_1 og L_2M_2 i B_1 osv, da er $A_1C_1 =$ og $\perp B_1D_1$ (sml. Prisopgavens 1ste Del).

2⁰ Er Kvadraterne $K_1L_1M_1N_1$ og $K_2L_2M_2N_2$ begge indskrevne i Firkant $ABCD$, idet K_1 og K_2 ligger paa AB, L_1 og L_2 paa BC osv., og er O Skæringspunktet mellem A_1C_1 og B_1D_1, da er $\angle OK_1A = \angle OL_1B = \angle OM_1C = \angle ON_1D$, og omvendt: Vælges Punkterne K paa AB, L paa BC osv. saadan, at $\angle OKA = \angle OLB = \angle OMC = \angle OND$, er $KLMN$ et Kvadrat.

3⁰ Vælges K saadan, at $\angle OKA = 90^0$, bliver Siderne i Kvadratet $KLMN$ parallele med Firkantens Diagonaler, der altsaa staar vinkelret paa hinanden; desuden er $\angle BAO = \angle DAC$, $\angle ABO = \angle CBD$, $\angle BCO = \angle DCA$, osv.

4⁰ *Naar en Firkant har to indskrevne Kvadrater, har den uendelig mange, og der findes da et Punkt, hvis Projektioner paa Firkantens Side er Vinkelspidser i et Kvadrat,* og omvendt:

Gives der et Punkt, hvis Projektioner paa en Firkants Sider er Vinkelspidser i et Kvadrat, har Firkanten uendelig mange indskrevne Kvadrater.

5⁰ Idet $\angle KAO = \angle KNO = \angle DNM = \angle DAC = x$ og $\angle KBO = CBD = y$, faas $NK = AO \sin A = KL = BO \sin B$, hvoraf $\frac{AO}{BO} = \frac{\sin B}{\sin A}$; men $\frac{AO}{BO} = \frac{\sin y}{\sin x}$ og $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{AO_1}{BO_1}$, idet O_1 er Skæringspunktet mellem AD og BC. Projiceres O_1 paa AC og BD i henholdsvis A_2 og B_2, faar man nu $AO_1 \sin x = BO_1 \sin y$ eller $O_1A_2 = O_1B_2$, hvoraf følger, at O_1 ligger paa Halveringslinien af Diagonalernes Vinkel.

Litteraturanmeldelser.

Th. Sundorph: Varmelære for Gymnasiet: Andet Oplag. 46 Sider. Gyldendal. (Anmeldt af Adjunkt Chr. Jensen.)

Lektor Sundorphs Navn som Lærebogsforfatter har en god Klang blandt Fysiklærere i de forskellige Skoleafdelinger. Grundlaget for Fremstillingen i hans Bøger er velvalgte, anskuelige Forsøg, som kan foretages med smaa Midler, og det knappe og klare Sprog letter i høj Grad Eleverne Tilegnelsen af Stoffet. Den foreliggende nye Udgave af Varmelæren viser, at Forf.s Lærebøger er ved at bane sig samme sikre Vej i Gymnasiet som tidligere i Mellem- og Realskolen.

* * *

A. Steensig: Om Undervisningen i Naturlære. Metodisk Vejledning. 104 Sider. Gyldendal. (Anmeldt af Adjunkt Chr. Jensen.)

Titelen er noget misvisende. Paa den første Snes Sider er der gjort Forsøg paa at fremstille gammelkendte Principer for Undervisning i Naturlære, Resten af Pjecen er en Lærebog i Fysik for Barneskolen med Beskrivelse af almenkendte og allevegne fra sammenplukkede Forsøg. Pjecen indeholder ingen nye Synspunkter, den er skrevet i et snakkesaligt og ikke altid lige heldigt Sprog. S. 49 advarer Forf. mod »at komme ind paa Fordampningsvarme eller andre indviklede Problemer«, men en halv Side længere fremme angives to Forsøg, om hvilke Forf. siger, at det første viser, »at der altsaa maa bruges Varme til Vandets Fordampning«, og at det sidste viser, at »naar Dampe fortættes, afgiver de Varme til Omgivelserne.« S. 98 nævnes »Karbid« mellem Brændselsstoffer, der indeholder Kulstof og Brint. S. 101 dannes »klorsurt Magnium« ved at hælde Saltsyre paa Magnium.

Hans Christian Ørsted.

Af Lektor H. Iversen.

Den 21. Juli iaar var Hundredaarsdagen for Udsendelsen af H. C. Ørsteds Beretning om hans Opdagelse af den elek-

Digitized by Google

triske Strøms Virkning paa en Magnetnaal og hans Fremstilling af Lovene for denne Virkning. Paa afdøde Geheimekonferentsraad G. A. Hagemanns Initiativ blev der allerede fra 1914 truffet Forberedelser til at fejre denne Mindedag paa en værdig Maade ved Afholdelse af et internationalt Feststævne og ved Forberedelse af en ny Udgave af H. C. Ørsteds Skrifter. Medens det internationale Stævne paa Grund af Forholdene ikke kunde faa et saadant Omfang som ønskeligt, bredte noget af Festens Stemning sig herhjemme ogsaa udover de videnskabelige Kredse, især til Landets Skoler.

Men nu efter Festen er der særlig Grund til at gøre opmærksom paa det dybeste Spor, som Mindeaaret har sat, nemlig Fru Kirstine Meyers Afhandlinger om H. C. Ørsteds Liv. Værket bestaar af 2 Dele, hvoraf det ene omhandler »*Arbejdsliv i det danske Samfund*« og det andet »*Scientific Life and Works of H. C. Ørsted*«. Disse to Afhandlinger giver hver sin Side af H. C. Ørsteds Virksomheder, der griber ind i hinanden og alt i alt giver os et Billede af en Aand, der med en sjælden Frodighed og Kraft formaaede at trænge ind i Naturens indre Væsen og paa flere fundamentale Omraader at tilrettelægge Grundlagene for de Idéer, som i det paafølgende Hundredaar har faaet sine fastere Former, og dernæst Billedet af en Mand, der med stor personlig Opofrelse søgte at højne Folket ved at gøre det delagtigt i Kundskaben om Naturens simple Love som et Middel til materiel og især aandelig Berigelse. Fordybelsen i et saa idéerigt og frugtbart Arbejdsliv virker endnu idag ansporende og tankevækkende.

I første Del følger vi H. C. Ørsteds taalmodige Arbejde for at hæve Fysikken til en selvstændig Stilling inden for Universitetet, derefter hans Virksomhed i Videnskabernes Selskab, som gennem ham hæves til Anseelse og Betydning, og endelig ser vi Rammerne for den hele Række fysisktekniske Institutioner danne sig efter Ørsteds Plan, saaledes som de virker i vor Tid til Ære for vort Land.

Den centrale Del af »Scientific Life« er ganske naturligt Undersøgelserne angaaende selve Opdagelsen af Elektromagnetismen. For Eftertiden kan denne Opdagelse synes saa ligetil, at man kunde kalde det en ren Tilfældighed, hvilken Aladdin der skulde faa denne skønne Appelsin i sin Turban. Det er da i høj Grad interessant at følge den historiske Paa-

Digitized by Google

visning af, at H. C. Ørsted tværtimod var en Columbus, der gennem et aarelangt Arbejde mod dette Maal ogsaa skulde fremtræde som Skæbnens udvalgte. Ud fra sit filosofiske Princip om en Enhedskraft i Naturvirksomhederne, som han antog maatte opstaa som en Ligevægtsforstyrrelse mellem positive og negative Elektricitetsdele og deraf paafølgende »Konflikt«, der ytrede sig som elektrisk Strøm og undertiden Sidevirkningerne Varme og Lys, maatte han savne en magnetisk Sidevirkning, som han tænkte sig, at man først vilde spore under lignende Betingelser, som gav Varme og Lys. Derfor gjorde han sine første Forsøg med et stort Batteri — høj Spænding — og stor Modstand. Af Ørsteds løse Optegnelser fra den Tid kan hele den fuldstændige Undersøgelses Gang og derigennem de Grundtanker, der har ledet ham, følges næsten fra Dag til Dag, men allerede i det samme Tidsskrift, som indeholdt hans første Meddelelse om Opdagelsen, findes en anden, der fastslaar, at Forsøgene kan gøres med et Element, og at det ikke er Spændingen men Elektricitetsmængden (Strømmen), der betinger Virkningens Størrelse, og angiver Forsøg til Paavisning af Reaktionskraften.

Virkningen af den første Meddelelse paa den lærde Verden i de store Kulturlande var overordentlig stor. Allerede 8 Maaneder efter skrev *Faraday* en historisk Oversigt over Litteraturen om Elektromagnetismen, da det var »meget vanskeligt at finde Hoved og Hale« mellem de mange Arbejder, der var fremkommet, men endnu paa dette Tidspunkt erklærer Faraday om Ørsteds to Meddelelser, at de indeholder »en meget stor Del af de Kendsgerninger, der indtil nu foreligger om Æmnet.«

Vi skal ikke her gaa ind paa Omtalen af andre Spørgsmaal, som behandles i de foreliggende Afhandlinger, der kaster klare Strejflys over den rige aandelige og videnskabelige Udvikling i den første Halvdel af det nittende Aarhundrede, men blot anbefale Afhandlingerne til enhver, der kan have Interesse for disse Omraader og for Ørsteds Skikkelse, for hvilken vor Sympati og Beundring forstærkes ved denne historiske Undersøgelse.

Digitized by Google

Opgaveafdeling.

Redigeret af cand. mag. G. M. Stensig.

Danske Eksamensopgaver.

Adgangseksamen til Polyteknisk Læreanstalt 1920.

I.

1. I en given Trekant ABC skal man ved Konstruktion indskrive et Rektangel $MNPQ$, hvis ene Side MQ ligger paa Grundlinien AC, medens Vinkelspidsen N ligger paa Siden AB og P paa Siden BC, idet man har givet Differencen d mellem NP og NM.

2. Find alle de Værdier af x, der tilfredsstiller Ligningen

$$\sin x - 3\cos x = 8 \sin x \cos^2 x.$$

3. En regulær Pyramides Grundflade er en regulær n-kant, hvis omkrevne Cirkel har Radius r. Hvor stor maa den fra Toppunktet udgaaende Median i en af Sidetrekanterne være, naar Centrerne for Pyramidens omskrevne og indskrevne Kugle skal falde sammen?

Resultater:

1. Gennem Punktet D paa Siden AC, valgt saaledes, at $CD = d$, trækkes en Linie parallel med BC skærende AB i E. Man skal da i Trekant AED indskrive et Kvadrat, hvis ene Side falder langs AD.

2. Ligningen kan gøres homogen af 3. Grad i $\sin x$ og $\cos x$. Man finder $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = 2 \pm \sqrt{7}$.

3. Medianens Længde bliver $r\left(1 + \cos\frac{\pi}{n}\right)$.

II.

1. Fra det ene Endepunkt A af en retliniet Vej AB gaar en ligeledes retliniet Vej til et Punkt C; fra det andet Endepunkt B gaar en retliniet Vej til et Punkt D. Punkterne C og D ligger paa modsatte Sider af Vejen AB, og Linierne AC og BD danner henholdsvis Vinklerne α og β med samme Retning af Vejen AB. Find Afstanden mellem Punkterne C og D, naar man har givet $AB = 6{,}718$ km; $AC = 3{,}245$ km; $BD = 2{,}658$ km; $\alpha = 21^0{,}41$; $\beta = 62^0{,}67$.

2. Beregn

$$x = (\sin 0{,}2531)^{\cos 0{,}2531}.$$

Digitized by Google

Resultater:

1. Vælger man Retningen af Vejen fra A til B, bliver Afstanden 6,061.

2. $x = 0,2616$.

III.

1. Den algebraiske Ligning

$$x^3 - 6x^2 + 7x - 4 = 0$$

har Rødderne α, β, γ. Find Værdien af Udtrykket:

$$4\alpha^3\beta^2\gamma + 4\alpha^3\beta\gamma^2 + 4\alpha^2\beta^3\gamma + 4\alpha^2\beta\gamma^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha^2\gamma$$
$$+ 4\alpha\beta^3\gamma^2 + 4\alpha\beta^2\gamma^3 - 3\alpha\beta^2 - 2\alpha\gamma^2 - 3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 .$$

2. Hvilken Betingelse maa Eksponenterne α, β, γ opfylde, naar Størrelsen

$$k \cdot a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$$

skal være et Led i Udviklingen af

$$(a + b + c)^n, \quad n \text{ positiv, hel?}$$

Find Talkoefficienten k udtrykt ved n, α, β, γ.

Resultater:

1. Udtrykket kan skrives som $[4\alpha\beta\gamma - 3]\,[\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2] = 13\,[(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) - 3\alpha\beta\gamma] = 390.$

2. $\alpha + \beta + \gamma = n; \quad k = \dfrac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}.$

IV.

Tangenten til Parablen $y^2 = px$ i et vilkaarligt Punkt P skærer Parablens Akse i Punktet Q. Paa Tangenten afsættes Punktet R saaledes, at $PR = 2 \cdot QP$ (i Størrelse og Fortegn). Derefter bestemmes Midtpunktet S af Linjestykket RF, hvor F betegner Parablens Brændpunkt. Find det geometriske Sted for Punktet S, naar P gennemløber Parablen. Find endvidere Maksimum eller Minimum af Afstanden mellem det variable Punkt S og Linjen $ax + by + c = 0$, samt det hertil svarende Punkt P paa Parablen.

2. Vis at Kurven

$$y = x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 23x + 101$$

ligger helt over Parablen

$$y = x^2 + x + 1;$$

bestem dernæst det Areal, der begrænses af de to Kurver, Ordinataksen og en vilkaarlig Ordinatlinie, specielt den Ordinatlinie, hvorpaa der mellem de to Kurver afskæres det korteste Liniestykke.

Digitized by Google

Resultater:

1. Det søgte geometriske Sted bliver Parablen $y^2 = \frac{9}{10}px - \frac{9p^2}{80}$.

Det søgte Punkt P har Koordinaterne $\left(\frac{9pb^2}{100a^2}, -\frac{3pb}{10a}\right)$; den tilsvarende Afstand bliver $\frac{5pa^2 - 9pb^2 + 40ac}{\pm 40a\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2. Det gælder om at vise. at Funktionen

$$Y = x^4 - 8x^3 + 22x^3 - 24x + 100$$

bestandig er positiv. Den tilsvarende Kurve har Minimumspunkter for $x = 1$ og for $x = 3$. Den mindste Værdi, Y kan antage, bliver 91, svarende til $x = 1$. Det søgte Areal bliver

$$\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{22x^3}{3} - 12x^2 + 100x,$$

der for $x = 1$ antager Værdien $93\frac{8}{15}$.

Studentereksamen

Maj—Juli 1920.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Find x og y af Ligningerne

$$y^2 - xy - 3x + 3y - 3 = 0$$
$$x^3 + xy^2 - 2x^2 - 2y^2 - 25x + 50 = 0.$$

2. I $\triangle ABC$ er $\angle A = 29^0\,30'$, den modstaaende Side $a = 0{,}8$ dm og den indskrevne Cirkels Radius $r = 0{,}24$ dm. Beregn Trekantens ubekendte Vinkler og Sider samt Arealet.

3. I et retvinklet Koordinatsystem er givet Punkterne $A(a, 0)$ og $B(0, a)$. Punkterne P og Q bevæger sig saaledes paa henholdsvis X-aksen og Y-aksen, at $AP \cdot BQ = 2a^2$. Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem BP og AQ.

Resultater:

1.

x	2	4	-4	3	2	-4
y	-3	-3	-3	4	3	-3

2. Vinklerne $108^0\,28'$ og $42^0\,2'$; Siderne 1,532 og 1,090; $T = 0{,}4109$.

3. Det søgte geometriske Sted bliver Cirklen $x^2 + y^2 = a^2$.

II.

Bevis, at

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1)(2n+3)$$
$$= n(n+2)(2n^2 + 4n - 1).$$

Digitized by Google

2. Der er givet Kurverne $y = \sin x$ og $y = \cos x$. Find en saadan Værdi af x, beliggende mellem 0 og π, at de Tangenter, hvis Røringspunkter har denne Abscisse, er parallele. Find dernæst Arealet af en af de lukkede Figurer, der begrænses af Kurverne og Forbindelseslinien mellem de to Røringspunkter.

3. I en Pyramide med Højden h er indskrevet et Prisme. saaledes at Prismets ene Endeflade har sine Vinkelspidser paa Pyramidens Kanter, og den anden Endeflade ligger i Pyramidens Grundflade. Find Prismets Højde, naar dets Rumfang er saa stort som muligt.

Resultater:

1. For at gennemføre Induktionsbeviset kan man vise Ligheden

$$n(n+2)(2n^2+4n-1)+(2n+1)(2n+3)(2n+5)$$
$$=(n+1)(n+3)(2n^2+8n+5)$$

ved at multiplicere de forekommende Parenteser ud.

2. Man maa løse Ligningen $\cos x = -\sin x$, hvilket her giver $x = \frac{3\pi}{4}$. Arealet bliver $\sqrt{2}$.

3. Den søgte Højde bliver $\frac{h}{3}$.

For de sproglige Linier.
(Modenhedsprøven).

1. I en Kvotientrække med tre Led er Summen af Leddene 25, og Summen af Produkterne af Leddene to og to er 156. Find de tre Led.

2. Bestem Udseendet af den Kurve, hvis Ligning i retvinklede Koordinater er

$$y = 6 + x - x^2.$$

3. I Firkant $ABCD$ er $AB = BC = CD = 2$ cm, $AC = 1$ cm og $\angle ACD = 90^0$. Beregn Firkantens Vinkler, Siden AD og Diagonalen BD.

Resultater:

1. Leddene bliver 2, 6, 18 eller 18, 6, 2.

2. Kurven er en Parabel med Toppunkt i $(\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$, der er et Maksimumspunkt. Skæringspunkterne med Akserne bestemmes let.

3. Vinklerne bliver: $A = 148^0\,57'$, $B = 28^0\,58'$, $C = 165^0\,31'$ og $D = 26^0\,34'$, $AD = 2{,}236$, $BD = 3{,}969$.

Digitized by Google

Almindelig Forberedelseseksamen.

Maj—Juli 1920.

Regning.

1. Et Arbejde, for hvilket der betales 1726,40 Kr., udføres af 4 Svende *A*, *B*, *C* og *D* samt 2 Lærlinge.

Den daglige Arbejdstid er 8 Timer, og *A* arbejder i $17\frac{1}{4}$ Dag, *B* i $19\frac{1}{2}$ Dag, *C* i $18\frac{3}{4}$ Dag, *D* i 12 Dage, og hver af Lærlingene i 19 Dage.

Der udbetales hver af Svendene 1,85 Kr. og hver af Lærlingene 0,35 Kr. pr. Arbejdstime; hvor meget tilkommer der yderligere hver Svend, naar Restsummen deles mellem Svendene i Forhold til deres Arbejdstimers Antal?

Hvor stor har hver Svends samlede Timeløn været?

2. En Havegang om en cirkulær Plæne, hvis Diameter er 8 m, har en Bredde af 1,5 m og er belagt med et Gruslag af 2 cm's Tykkelse.

Hvor mange hl Grus ligger der paa Havegangen?

Gruset skuffes sammen i en kegleformet Bunke, hvis Højde er halv saa stor som Grundfladens Radius; find Bunkens Højde.

Gruslagets Rumfang er Produktet af Havegangens Areal og Lagets Tykkelse. En Kegles Rumfang er $\frac{1}{3}$ af Produktet af Højden og Grundfladens Areal.

Resultater:

1. 158,70 Kr., 179,40 Kr., 172,50 Kr. og 110,40 Kr. — 3,00 Kr.
2. 8,95 hl. 59,8 cm.

Aritmetik.

1. Find x af Ligningen

$$\sqrt[x]{0{,}04} = 15 \cdot \sqrt[2x]{81}\,.$$

2. Om 14 Aar er en Fader dobbelt saa gammel som sin Søn; for 10 Aar siden var Faderens Alder Kvadratet paa Sønnens.

Find Faderens og Sønnens nuværende Alder, og undersøg, om de fundne Løsninger er mulige.

3. I en Differensrække paa 4 Led er Produktet af 1ste og 2det Led lig Produktet af 3die og 4de Led.

Find Rækkens Sum, naar 1ste Led er $5\frac{3}{4}$.

Resultater:

1. $x = -2$.

Digitized by Google

2. Faderen 46 Aar, Sønnen 16 Aar; en Løsning maa forkastes.

3. $d = \begin{cases} 0 \\ -\frac{23}{6} \end{cases}$, $s = \begin{cases} 23 \\ 0 \end{cases}$.

Geometri.

1. Konstruer en Rombe af en Diagonal og Afstanden mellem et Par modstaaende Sider.

2. I Trekant ABC er Siderne $AB = 21$ cm, $AC = 28$ cm og $BC = 35$ cm, og Transversalen $DE \not\parallel BC$ er lig med 25 cm.

Find de Stykker, hvori AB og AC er delte, og find Arealerne af de Figurer, hvori Trekant ABC er delt.

3. I en Trekant ABC, hvor $\angle A = 45^0$, er O Skæringspunktet mellem Højderne AA_1, BB_1 og CC_1.

Bevis, at $OB_1 = CB_1$, $OC_1 = BC_1$ og $OA = BC$.

Resultater:

1. Man kan benytte sig af, at Diagonalerne i en R. staar vinkelret paa Midten af m.

2. 15 cm, 20 cm. Arealerne 150 cm² og 144 cm².

3. $\triangle AOB_1 \sim \triangle BCB_1$.

Realeksamen.

Juni—Juli 1920.

Regning og Matematik.

1. A køber i Holland 3500 kg Javakaffe for 1,48 fl pr. kg. I Fragt betales 24 fl pr. 1000 kg. Tolden udgør 17 Øre pr. kg, og andre Omkostninger beløber sig til 250,60 Kr. Hvor mange Kr. koster Javakaffen ialt pr. kg?

1 fl = 2,10 Kr.

A blander Javakaffen med et Parti Brasilkaffe, der vejer 2100 kg, og sælger Blandingen for 4,03 Kr. pr. kg, hvorved han tjener 24 pCt. Hvor meget har Brasilkaffen kostet pr. kg i Indkøb?

2. A købte den 15. Februar 5000 Kr. $4\frac{1}{2}$ pCt.'s Obligationer til Kurs 85 (Termin $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$). Kurtage 1 pro mille.

Hvor meget betalte han for Obligationerne?

Den 19. April solgte A Obligationerne til en Vekselmægler for 4875,20 Kr. Til hvilken Kurs solgtes Obligationerne, naar Vekselmægleren beregnede sig 1 pro mille i Kurtage?

3. Find x af Ligningen

$$\sqrt{8 - x} + \sqrt{x - 3} = \sqrt{x + 5}\,.$$

Digitized by Google

Resultater:

1. 3,40 Kr.; 3,00 Kr.
2. 4294,25 Kr; Kursen 96.
3. $x = \begin{cases} \frac{24}{5} \\ 4 \end{cases}$.

Mellemskoleeksamen.

Juni—Juli 1920.

Regning.

Krudt er en Blanding af Salpeter, Kul og Svovl. Af Blandingens Vægt udgør Salpeteret de 74 pCt. og Kullet de 15 pCt.

Der spørges:

a) Hvor meget Salpeter, Kul og Svovl findes der i 430 kg Krudt?

b) Hvad vejer den Mængde Krudt, der indeholder 125,8 kg Salpeter, og hvor meget Kul og Svovl indeholder den?

c) Hvad vejer den Mængde Krudt, der indeholder 34,5 kg Kul, og hvor meget Salpeter og Svovl indeholder den?

d) Hvad vejer den Mængde Krudt, der indeholder 40,7 kg Svovl, og hvor meget Salpeter og Kul indeholder den?

2. Den 5. Maj sælges 2 Veksler i en Bank. Den ene lyder paa 1740 Kr. og forfalder d. 11. Juni. Hvor meget betaler Banken for den?

Paa hvilken Sum lyder den anden, naar den forfalder den 12. Juli, og Diskontoen udgør 8,71 Kr.

Diskontoen beregnes efter 6 pCt p. a.

Resultater:

1. a) 318,2 kg. 64,5 kg, 47,3 kg. b) 170 kg, 25,5 kg, 18,7 kg. c) 230 kg, 170,2 kg, 25,3 kg. d) 370 kg, 273,8 kg, 55,5 kg.
2. 1729,56 Kr.; 780 Kr.

Matematik

1. Konstruer en Firkant $ABCD$ af $\angle A = 105°$, Siden $AB = 4$ cm, Siden $BC = 3$ cm og Diagonalen $AC = 5$ cm, naar tilligeSiden CD skal være Fjerdeproportionalen til BC, AB og AC.

2. Find x og y af Ligningerne

$$\frac{2x - 5}{3} - \frac{4 - 5y}{7} = 4,5,$$

$$\frac{3x - 14}{4} + \frac{3,1 + 4y}{7} = 4,5.$$

Resultater:

2. $x = 10$, $y = 0,1$.

Digitized by Google

Norske Eksamensopgaver.

(Løsningerne ved lektor Søgaard, Kristiania).

Realartium 1920.

I.

La P være det ene endepunkt av en diameter i ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

og la Q være det ene endepunkt av den konjugerte diameter. Find P's koordinater uttrykt ved Q's koordinater.

Find dernæst det geometriske sted for midtpunktet av korden PQ. Utled av resultatet, hvad det geometriske sted for skjæringspunktet mellem tangenten i P og tangenten i Q blir. Tegn figur.

II.

Utled den formel, som uttrykker arealet av en retavkortet ret kegles sideflate ved grundflatens radius, topflatens radius og siden.

Formelen skal anvendes i følgende opgave: En retavkortet ret kegle er omskrevet om en kule. Vis, at den retavkortede kegles sideflate har samme flateindhold som en cirkel med radius lik summen av grundflatens radius og topflatens radius, og videre, at den indskrevne kules radius er mellemproportionalleddet mellem disse radier. Bestem ved hjælp herav, hvor stort forholdet mellem topflatens radius og grundflatens radius maa være, naar sideflatens areal skal være n ganger saa stort som den indskrevne kules overflate. Hvad er minimumsværdien av n?

III.

I en likebenet trekant er vinkelen ved toppunktet git lik $2v$ og høiden paa grundlinjen git lik h.

Find trekantens sider, omkreds og flateindhold uttrykt ved h og v.

Find dernæst den indskrevne cirkels radius r og den omskrevne cirkels radius R, begge uttrykt ved h og $\sin v$, og bestem ved hjælp derav $\sin v$, naar forholdet $\frac{r}{R}$ har en opgit værdi n. Drøft resultatet. Beregn tilslut v naar $n = \frac{1}{5}$. (v forlanges angit i grader, minutter og tiendedels minutter).

Digitized by Google

Svar:

I. $x_2 = \pm \frac{a}{b} y_1$; $y_2 = \mp \frac{b}{a} x_1$.

Geom. sted: $\frac{x^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{2}} = 1$ og $\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2} = 1$.

II. $\frac{r}{R} = 2n - 1 - \sqrt{n(n-1)}$; $n_{min} = 1$.

III. $a = b = \frac{h}{\cos v}$; $c = 2h \operatorname{tg} v$

$o = 2h \frac{1 + \sin v}{\cos v}$; $fl = h^2 \cdot \operatorname{tg} v$.

$r = \frac{h \sin v}{1 + \sin v}$; $R = \frac{h}{2(1 - \sin^2 v)}$

$\sin v = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2n}}{2}$, hvor $n \gtreqless \frac{1}{2}$ og + kun kan brukes dersom $n > 0$. $v_1 = 62^0\ 32',1$ og $v_2 = 6^0\ 28',2$.

Projektionstegning.

Et legeme bestaar av to regulære firkantede pyramider med fælles grundflate *ABCD*, hvis side er 7 cm. Høiden i den ene pyramide *ABCDP* er 5 cm, og høiden i den anden pyramide *ABCDQ* er 9 cm.

Dette legeme ligger med sin sideflate *ABP* paa horizontalplanet; den horizontale projektion av aksen *PQ* danner en vinkel paa 45⁰ med grundlinjen, og hjørnet *Q*, som er vertikalplanet nærmest, har en avstand paa 3 cm fra dette.

Legemet er gennemskaaret av et ugjennemsigtig plan, som gaar gjennem grundlinjen og midtpunktet av de to pyramiders fælles grundflate.

Tegn de to projektioner av legemet med snit.

Sproglig-historisk artium.

I.

Naar man har git to førstegrads ligninger mellem x og y, eksisterer der i almindelighet ett sæt værdier, som indsat for x og y tilfredstiller begge ligninger. Nævn de undtagelsestilfælde, som kan indtræffe.

Løs ligningssystemet:

$$ax - 8y = 20$$
$$ay - 2x = 10,$$

Digitized by Google

hvor a er et kjendt tal, og gjør nøjagtig rede for de forskjelligartede tilfælder, som kan indtræffe.

Naar a f. eks. er lik 5, gaar ligningssystemet ind under det almindelige tilfælde. Løs ligningssystemet grafisk for denne værdi av a (bruk hertil millimeternettet paa eksamenspapirets bakside).

Gi ogsaa grafisk fremstilling for de undtagelsestilfælde, som maatte eksistere.

II.

Konstruer en regulær femkant med side lik 3,5 cm. Beregn derpaa trigonometrisk denne femkants større radius og mindre radius. Beregn tilslut størrelsen av den flate, som ligger mellem femkantens omskrevne cirkel og femkantens indskrevne cirkel. Brug logaritmer ved alle beregningene.

III.

I en retvinklet trekant er differensen mellem hypotenusen og den ene katet lik d_1, og differensen mellem hypotenusen og den anden katet lik d_2. Find sidene uttrykt ved d_1 og d_2.

Forklar dernæst, hvorledes de fundne uttryk lar sig konstruere.

Svar:

I. $x = \frac{20}{a-4}$; $y = \frac{10}{a-4}$. For $a = -4$ er systemet ubestemt, for $a = 4$ selvmotsigende.

II. $R = 2{,}9773$ cm, $r = 2{,}4087$ cm, $fl = 9{,}6212$ cm².

III. $x = d_1 + d_2 \pm \sqrt{2d_1d_2}$,

$y = d_1 \pm \sqrt{2d_1d_2}$,

$z = d_2 \pm \sqrt{2d_1d_2}$.

Middelskoleaksamen.

Fuldstændig prøve.

Formiddag.

I.

Et parti raa olje er kjøpt i Amerika. Partiet bestaar av 25 fat; hvert fat indeholder 85 kg olje. Indkjøpsprisen er 40 dollars 25 cents pr. fat. Hvor stor sum blev betalt i Amerika?

Oljen maa renses, og herved tapes $12\frac{1}{2}$ pct. av den oprindelige vegt. Hvor mange kg renset olje faar man?

Partiet sælges 5 maaneder efter at det er betalt i Amerika for 2,60 kr. pr. liter. Hvor stor er fortjenesten ved denne forretning, naar der regnes rentetap av indkjøpssummen efter 6

Digitized by Google

pct. p. a., og samtlige omkostninger ved forsendelsen og rensningen beløper sig til 606 kr.?

1 dollar = 100 cents = 3,80 kr. 1 liter renset olje vejer 920 g.

II.

Konstruer en firkant $ABCD$ (bokstavene i alfabetisk orden figuren rundt), hvor $\angle ACB = 90^0$, AB = linjestykket a og BC = linjestykket b (bruk de linjestykker, som er tegnet nedenfor). Desuten skal $AD = CD$ og diagonalen $BD = \frac{5}{6} AC$.

Perpendikulæren fra D paa AC gaar gjennem midtpunktet av AC. Hvorfor vil den forlænget ogsaa gaa gjennem midtpunktet av AB? Kald det punkt hvor perpendikulæren træffer AC for E, og det punkt hvor den træffer AB for F. Hvad slags firkant er $BCEF$?

Beregn længden av AC og EF under den forutsætning at AB var 39 m BC var 15 m. Beregn ogsaa flateindholdet av firkanten $BCEF$ under samme forutsætning.

Svar:

I. 1006 dollars 25 cents; 1859,375 kg; 729,42 kr.
II. $AC = 36$ m, $EF = 7,5$ m, $fl = 202,5$ m^2.

Eftermiddag.

I.

Et rektangulært vandbassin er 6 m langt, 4,5 m bredt og overalt 2,5 m dypt. Hvor stort rumindhold har dette bassin?

For at finde hvor lang tid det tar at fylde dette bassin med vand fra et vandledningsrør, fylder man fra samme ledningsrør et cylindrisk spand, hvis diameter er 34 cm, og hvis høide er 45 cm, indvendig maalt; dette tar $\frac{1}{2}$ minut. Hvor mange liter rummer spandet? Hvor lang tid tar det at fylde bassinet?

II.

For at bestemme den specifike vegt av et visst legeme som er saa let at det flyter i vand, fæstet man først et messinglod paa 100 g til legemet og slap det hele op i vand med loddet underst; det viste sig da at halvparten av det lette legeme fløt over vandet. Dernæst fæstet man et messinglod paa 200 g til legemet og slap det hele op i vand med loddet underst; det viste sig da at en tredjedel av det lette legeme fløt over vandet.

Digitized by Google

Benyt den fra fysikken kjendte lov, at naar et legeme flyter i vand, er legemets vegt lik vegten av den fortrængte vandmængde, til at finde legemets volum (x cm^3) og dets vegt (y g). Find derav den specifike vegt.

Messings specifike vegt = 8.

Svar:

I. 67,5 m^3; 40,836 l; 13 t. 46 min.
II. $x = 525$ cm^3; $y = 175$ gr; sp. v. $= \frac{1}{3}$.

Indskrænket prøve.

Formiddag.

I.

Som fuldstændig prøve I.

II.

Konstruer en firkant $ABCD$ (bokstavene i alfabetisk orden figuren rundt), hvor $\angle ACB = 90^\circ$, $AB =$ linjestykket A og $BC =$ linjestykket b (bruk de linjestykker som er tegnet nedenfor.) Desuten skal $AD = CD$ og diagonalen $BD = \frac{5}{6} AC$.

Kald det punkt hvor perpendikulæren fra D paa diagonalen AC træffer denne for E, og det punkt hvor den samme perpendikulær forlænget træffer AB for F. Firkanten $BCEF$ er da et trapets. Maal de linjestykker som det er nødvendig at maale for at kunne beregne trapetsets flateindhold, og find dette flateindhold.

Eftermiddag.

I.

Som fuldstændig prøve I.

II.

To veistykker skal oparbeides. Det ene er 2848 m langt og det andet er 1780 m langt; begge er like vanskelige at oparbeide. Der er antat 39 mand til at utføre arbeidet. Alle disse antas at arbeide like hurtig. Hvordan skal da de 39 mand fordeles paa de to veiarbeider for at disse skal bli færdige i samme tid? Hvor mange dage vil der gaa med til dette arbeide, naar de arbeider 8 timer daglig, og man antar at hver mand kan gjøre helt færdig 1 m vei paa 3 timer?

Svar:

II. 24 mand; 15 mand; $44\frac{1}{2}$ dag.

Digitized by Google

Tillægsprøve.

Formiddag.

I.

Regn ut følgende polynom:

$$\left(5x : \frac{1}{x}\right) - \left(3x \cdot \frac{x+1}{4x+1}\right) - \left(x : \left(4 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

og angi svaret i form av et blandet tal.

II.

Som fuldstændig prøve II.

Svar:

I. $5x^2 - x - \frac{2x}{4x+1}$.

Eftermiddag.

I.

Der er git en cirkel med radius 3 cm. Konstruer en sekant som av cirkelen avskjærer en bue $AB = 82\frac{1}{2}^0$. Fra B avsættes en bue $BC = 60^0$ saaledes at C kommer paa samme side av sekanten som cirkelens centrum. Konstruer gjennem C en ny sekant som danner en vinkel paa 45^0 med den første sekant. Hvor mange slike sekanter kan konstrueres? Den nye sekants andet skæringspunkt med cirkelen kaldes D. Find gradtallet av buene AD og DC. Disse gradtal skal findes for hver av de sekanter som kan trækkes.

II.

Som fuldstændig prøve II.

Svar:

I. $\smile AD = 30^0$ eller 150^0,
$\smile DC = 67^0$ eller $247\frac{1}{2}^0$.

Digitized by Google

Løste Opgaver.

51. Kong Ladodos I havde ladet bygge en Søjle med kvadratisk Tværsnit, og der var brugt mere end baade et og to Tusinde Sten. Hver Sten var en Alen lang, en Alen høj og en Alen bred. Paa den Tid, Kong Ladodos II levede, var de yderste Sten forvitrede, og Kongen gav Befaling til, at man skulde tage disse Sten bort og af dem bygge en ny Søjle. Nu staar der to ens Søjler til Minde om Kong Ladodos II. Hvor mange Sten var der i den første Søjle?

Løsning:

Er den første Søjles Højde y Alen, dens Bredde x Alen, indeholder den yx^2 Sten, og den anden Søjles Højde bliver $y - 1$ Alen, dens Bredde $x - 2$ Alen. Man har derfor følgende Ligning:

$$yx^2 = 2(x - 2)^2(y - 1)$$

eller

$$y = 1 + \frac{x^2}{x^2 - 8x + 8}.$$

For de Værdier af x, der kan komme i Betragtning, bliver Broken $\frac{x^2}{x^2 - 8x + 8}$ positiv hel, naar $x = 7$ eller $x = 8$. Hertil svarer $y = 50$ og $y = 9$. Da $yx^2 > 2000$, kan kun Værdierne $x = 7$ og $y = 50$ bruges. Søjlen indeholdt altsaa 2450 Sten.

N. Munk.

52. Naar man har udviklet Størrelsen $(x + y + z)^n$, erstatter man alle Koefficienter med Tallet 1. Find Værdien af det fremkomne Udtryk.

Løsning:

$$(x + y + z)^n = (x + y)^n + \binom{n}{1}(x + y)^{n-1} z + \cdots + z^n$$

$$= x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + y^n$$

$$+ \binom{n}{1} z \left(x^{n-1} + \binom{n-1}{1} x^{n-2} y + \cdots + y^{n-1} \right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \binom{n}{n-1} z^{n-1} (x + y)$$

$$+ z^n.$$

Digitized by Google

Idet alle Koefficienterne erstattes med Tallet 1, faas Udtrykket

$x^n + yx^{n-1} + y^2x^{n-2} + \cdots + y^n$

$(x^{n-1} + yx^{n-2} + y^2x^{n-3} + \cdots + y^{n-1})$

. . . .

. . . .

$^{n-1}(x+y)$

y^n

$$x^n \frac{\left(\frac{z}{x}\right)^{n+1} - 1}{\frac{z}{x} - 1} + yx^{n-1}\frac{\left(\frac{z}{x}\right) - 1}{\frac{z}{x} - 1} + \cdots + xy^{n-1}\frac{\left(\frac{z}{x}\right)^2 - 1}{\frac{z}{x} - 1} + y^n$$

$$\frac{1}{z-x}\left[z\frac{y^{n+1} - z^{n+1}}{y-z} - x\frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y}\right] = \frac{x^{n+2}(z-y) + y^{n+2}(x-z) + z^{n+2}(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}.$$

N. Munk.

(Løsning indsendt af V. Bredsdorff.)

53. Vis, at der blandt de paa hinanden følgende hele Tal

$$n+1,\quad n+2,\quad \cdots,\quad n+m$$

findes mindst lige saa mange Multipla af et vilkaarligt helt Tal p som blandt Tallene

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ m.$$

Løsning:

Er n et Multiplum af p, findes der lige mange Multipla af p i de to Talrækker. Man sætter dernæst $n = pq_0 + r_0$, $1 \leq r_0 \leq p-1$ og $m = p\cdot q_1 + r_1$, $0 \leq r_1 \leq p - 1$. Lad s være et helt Tal, der tilfredsstiller Betingelserne $1 \leq s \leq m$, saaledes at $pq_0 + r_0 + s = pq_2$ eller $r_0 + s = p(q_2 - q_0)$, da kan s have Værdierne $p - r_0$, $2p - r_0$, $3p - r_0$, $\cdots$, $q_3p - r_0$, hvor $1 \leq q_3p - r_0 \leq m$ eller $1 \leq q_3 \leq q_1 + \frac{r_0 + r_1}{p}$. s kan følgelig antage q_1 eller $q_1 + 1$ Værdier; blandt Tallene $1, 2, \cdots, m$ findes der netop q_1 Multipla af p.

N. Munk.

(Ogsaa løst af V. Bredsdorff.)

54. Løs Ligningerne

$$+\sqrt{x+7} \pm \sqrt{x+5} \pm \sqrt{x+3} \pm \sqrt{x+2} = 0$$

og bestem den Ligning, der tilfredsstilles af den fundne Rod.

Løsning:

$\sqrt{x+7} \pm \sqrt{x+2} = \pm\sqrt{x+5} \pm \sqrt{x+3}$; $1 \pm 2\sqrt{x^2+9x+14} = \pm 2\sqrt{x^2+8x+15}$. Efter en ny Kvadrering finder man $x = -\frac{215}{168}$. Herefter bliver $\sqrt{x+7} = \frac{31}{\sqrt{168}}$, $\sqrt{x+5} = \frac{25}{\sqrt{168}}$,

Digitized by Google

$\sqrt{x+3} = \frac{17}{\sqrt{168}}$ og $\sqrt{x+2} = \frac{11}{\sqrt{168}}$. Den fundne Rod tilhører Ligningen $\sqrt{x+7} - \sqrt{x+5} - \sqrt{x+3} + \sqrt{x+2} = 0$.

V. Bredsdorff.

55. I den retvinklede Trekant ABC ($\angle C\,90^0$) er

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2} = m.$$

Dan en Ligning af anden Grad med Rødderne $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ og $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ og diskuter denne Ligning. Find dernæst, udtrykt ved m, Værdien af Produkterne

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \text{ og } \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \text{ og af Brøken } \frac{a+b-c}{a+b+c}.$$

Løsning:

Af $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{A}{2}\right) = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$ findes $\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}$ $= 1 - m$, hvorefter den søgte Ligning bliver $x^2 - (1-m)x + m = 0$. Herved findes Betingelserne $0 < m \leq 3 - 2\sqrt{2}$.

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{m} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(m-1)^2-2m+m^2}},$$

altsaa

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2(1-m)},\ \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{2m}}{2(1-m)};$$

$$\frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{s-c}{s} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2} = m.$$

V. Bredsdorff.

(Ogsaa løst af N. Munk.)

56. Find paa et regulært Dodekaeders Overflade den korteste Vej fra en Hjørnespids i en Sideflade til en af de to Hjørnespidser i den modstaaende Sideflade, hvortil Kantvejen er $3a$.

Halvor Nørregaard.

Løsning:

Ved Udfoldning af to sammenhængende Sideflader i samme Plan bliver den korteste Vej en ret Linie med Længden x. Man finder da:

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + 4a^2\cos^2 36^0 - 4a^2\cos 36^0 \cos 144^0 \\ &= a^2 + 4a^2\cos 36^0(\cos 36^0 - \cos 144^0) \\ &= a^2 + 8a^2\cos^2 36^0 = a^2\cdot(4+\sqrt{5}). \end{aligned}$$

V. Bredsdorff.

57.*) Vis, at

$$\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{x+p} - \sum_{p=1}^{p=n}\frac{p}{(x+p-1)(x+p)} = \frac{n+1}{n+x} - \frac{1}{x},$$

samt at

$$\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\frac{1}{x+p} - \frac{p}{(x+p-1)(x+p)}\right) = 1 - \frac{1}{x}.$$

(O. A. Smith.)

Løsning:

Man har

$$\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{x+p} - \sum_{p=1}^{p=n}\frac{p}{(x+p-1)(x+p)}$$

$$= \sum_{p=1}^{p=n}\left(\frac{p+1}{x+p} - \frac{p}{x+p-1}\right) = \frac{n+1}{x+n} - \frac{1}{x}.$$

For at bevise Opgavens sidste Del har man kun at lade n vokse over alle Grænser. N. Munk.

(Ogsaa løst af V. Bredsdorff.)

58. (Se Opgavens Ordlyd i 1. Hefte, Aargang 1920 pg. 48).

Løsninger:

1. $\sin 3(x+y)\sin(x-y) + \sin 3(y+z)\sin(y-z)$ $+ \sin 3(z+x)\sin(z-x) = \frac{1}{2}[\cos(2x+4y) - \cos(4x+2y)$ $+ \cos(2y+4z) - \cos(4y+2z) + \cos(2z+4x) - \cos(4z+2x)]$ $= -[\sin(2x+2y+2z)\sin 2(y-z) + \sin(2x+2y+2z)\sin 2(z-x)$ $+ \sin(2x+2y+2z)\sin 2(x-y)] = -\sin 2s[\sin 2(x-y)$ $+ \sin 2(y-z) + \sin 2(z-x)] = -\sin 2s[2\sin(x-z)\cos(x+z-2y)$ $+ 2\sin(z-x)\cos(z-x)] = 4\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)\sin 2s$, hvormed Formlen er bevist.

*) I Opgavens Tekst var der indløbet et Par (reelle og formelle) Fejl.

Digitized by Google

5. $\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)+\sin(x-y)\sin(y+z)\sin(z+x)$
$+\sin(x+y)\sin(y-z)\sin(z+x)+\sin(x+y)\sin(y+z)\sin(z-x)$
$=\sin(x-y)[\sin(y-z)\sin(z-x)+\sin(y+z)\sin(z+x)$
$-\sin(x+y)\sin(z+x)\cos(z-x)-\sin(x+y)\sin(z-x)\cos(z+x)]$
$=\sin(x-y)\sin(z-x)[\sin(y-z)-\sin(x+y)\cos(z+x)$
$+\sin(z+x)\cos(x+y)]=\sin(x-y)\sin(z-x)[\sin(y-z)+\sin(z-y)]=0,$
hvormed Formlen er bevist.

6. $\sin x\sin y\sin 2(x+y)\sin(x-y)+\sin y\sin z\sin 2(y+z)\sin(y-z)$
$+\sin z\sin x\sin 2(z+x)\sin(z-x)$
$=\frac{1}{4}[\sin 2(x-y)\sin 2(x+y)+(\cos(3x+y)-\cos(x+3y))\cos(x+y)$
$+\sin 2(y-z)\sin 2(y+z)+(\cos(3y+z)-\cos(y+3z))\cos(y+z)$
$+\sin 2(z-x)\sin 2(z+x)+(\cos(3z+x)-\cos(z+3x))\cos(z+x)]$
$=\frac{1}{8}[\cos(4x+2y)+\cos 2x-\cos(2x+4y)-\cos 2y$
$+\cos(4y+2z)+\cos 2y-\cos(2y+4z)-\cos 2z$
$+\cos(4z+2x)+\cos 2z-\cos(2z+4x)-\cos 2x]$
$=-\frac{1}{4}[\sin(2x+2y+2z)\sin 2(x-z)+\sin(2x+2y+2z)\sin 2(y-x)$
$+\sin(2x+2y+2z)\sin 2(z-y)]=-\frac{1}{2}[\sin(y-z)\cos(2x-z-y)$
$+\sin(z-y)\cos(z-y)]\sin 2s=-\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)\sin 2s,$
hvormed Formlen er bevist.

7. $2\cos x\cos y\cos z\cos s-\cos(s+x)\cos(s+y)\cos(s+z)$
$-\cos(s-x)\cos(s-y)\cos(s-z)=\frac{1}{2}\cos s[\cos(x+y+z)$
$+\cos(x+y-z)+\cos(x+z-y)+\cos(x-y-z)]$
$-\frac{1}{2}\cos(s+z)[\cos(2s+x+y)+\cos(x-y)]-\frac{1}{2}\cos(s-z)[\cos(2s-x-y)$
$+\cos(x-y)]=\frac{1}{4}[\cos 2s+1+\cos(2x+2y)+\cos 2z+\cos(2x+2z)$
$+\cos 2y+\cos 2x+\cos(2y+2z)-\cos 4s-\cos(2x+2y)$
$-\cos(2x+2z)-\cos(2z+2y)-\cos 2s-\cos 2z-\cos 2x-\cos 2y]$
$=\frac{1}{4}[1-\cos 4s]=\frac{1}{2}\sin^2 2s,$
hvormed Formlen er bevist.

8. $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z+2\cos x\cos y\cos z-1$
$=(\cos x+\cos(y+z))(\cos x+\cos(y-z))$
$$=4\cos\frac{x+y+z}{2}\cos\frac{x-y-z}{2}\cos\frac{x+y-z}{2}\cos\frac{x-y+z}{2}$$
$$=4\cos\frac{s}{2}\cos\left(\frac{s}{2}-x\right)\cos\left(\frac{s}{2}-y\right)\cos\left(\frac{s}{2}-z\right),$$
hvormed Formlen er bevist. N. Munk.

Opgaver til Løsning.

69. Naar $A+B+C=\pi$, skal følgende Størrelser bringes paa logaritmisk Form:

$$\frac{\sin 3A}{\sin(B-C)}+\frac{\sin 3B}{\sin(C-A)}+\frac{\sin 3C}{\sin(A-B)}$$

og

$$\frac{\operatorname{tg} 3A}{\operatorname{tg}(B-C)}+\frac{\operatorname{tg} 3B}{\operatorname{tg}(C-A)}+\frac{\operatorname{tg} 3C}{\operatorname{tg}(A-B)}.$$

Digitized by Google

70. Naar $A + B + C = \pi$, har man for alle hele

$$p > 2: \sin(2p+1)A\sin(B-C) + \sin(2p+1)B\sin(C-A) + \sin(2p+1)C\sin(A-B)$$
$$= \sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)\sin A\sin B\sin C\cdot f(\sin A, \sin B, \sin C),$$

hvor f betegner en heltallig rational, symmetrisk Funktion af $\sin A$, $\sin B$ og $\sin C$. (69—70 af H. Paulli).

71. Hvis α, β og γ er Rødderne i Ligningen $x^3 + px + q = 0$, har man

$$3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5) = 5(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4).$$

72. Man betragter de Kugler K, som skærer to givne Kugler under rette Vinkler. Blandt disse Kugler K er der uendelig mange, der rører en Plan P. Find det geometriske Sted for Røringspunktet. Bevis endvidere, at de Kugler K, som gaar igennem et Punkt A, alle rører en vis ret Linie gennem A.

73. To Parabler har til fælles Ledelinie en given ret Linie, og tillige er Parablernes Brændpunkter givet. Konstruer Fællestangenterne og Skæringspunkterne for de to Parabler.

74. Udtryk Funktionen

$$y = \frac{\sin 3v + 2\sin 5v + \sin 7v}{\sin 3v + \sin 5v}$$

ved Hjælp af den variable Størrelse $x = 4\cos^2 v$ og undersøg Funktionen y, naar x varierer.

75. To parallele Planer P_1 og P_2 tangerer en Kugle. Den Keglefiade, der til Toppunkt har et Punkt S i Planen P_2, og som er omskrevet om Kuglen, skærer Planen P_1 i en Parabel. Find det geometriske Sted for denne Parabels Toppunkt, naar S gennemløber en ret Linie eller en Cirkel.

OPGAVER FOR GYMNASIEELEVER

og for Elever paa Seminarier og Adgangshold til Polyteknisk Læreanstalt.

33. Løs Ligningen $\sqrt{x+14} + \sqrt[3]{2x+18} = 2$; og angiv for hver Rod den Værdi, hver Rodstørrelse maa have, for at Ligningen bliver tilfredsstillet.

Digitized by Google

34. En Omdrejningskeglefflades Toppunktsvinkel er $2v$. Vinkelret paa en Frembringer i Afstand d fra Toppunktet lægges en Plan. Angiv Betingelsen for, at det fremkomne Snit bliver en Ellipse, Parabel eller Hyperbel. Find Parameteren i alle tre Tilfælde.

35. I retvinklet Koordinatsystem er givet Kurven med Ligningen: $(x^2 + y^2)(2(x^2 + y^2) - a^2)^2 = a^4 x^2$. Find Kurvens Ligning i polære Koordinater med Begyndelsespunktet til Pol og Abscisseaksen som Polarakse. Angiv en Konstruktion af Kurvens Punkter, og vis Kurvens Udseende. Find dernæst de Arealer, som Kurven begrænser.

(33—35 af J. J. Østergaard.)

36. Man har givet et Kvadrat og indenfor dette et Punkt P. Konstruer gennem P en Linie, der halverer Kvadratet.

37. Bevis, at man i en konveks Polygon altid kan finde tre paa hinanden følgende Vinkelspidser, saaledes at Polygonen ikke har noget Punkt udenfor Cirklen gennem disse tre Vinkelspidser.

38. Bevis, at $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a$. Bogstaverne betegner positive Tal og b, c og d er forskellige fra 1.

39. Vis, at et Produkt af flere positive variable Faktorer, hvis Sum er konstant, har sin største Værdi, naar Faktorerne er lige store.

40. Vis, at Produktet $x^m \cdot y^n$, hvor x og y er positive, Summen $x + y$ konstant og m og n positive hele Tal, har sin største Værdi, naar $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$.

41. Bestem det største retvinklede Parallelepiped, som kan indskrives i en Kugle med Radius r.

42. Bestem det største Paralleltrapez, som kan indskrives i en given Halvcirkel.

Prisopgave.

43. Man skal paa kvadreret Papir tegne den Kurve, hvis Ligning i retvinklede Koordinater er $y = \frac{x^2}{4}$. Bevis, at Lig-

Digitized by Google

ningen $z^2 - xz + y = 0$ for enhver Værdi af z fremstiller en Tangent til denne Kurve, idet x og y er løbende Koordinater. Vis dernæst, hvorledes man ved Hjælp af Kurven $y = \frac{x^2}{4}$ grafisk kan løse enhver kvadratisk Ligning.

Eks.: $z^2 - 3z + 1 = 0$; $z^2 + z - 1 = 0$; $z^2 - 2z + 3 = 0$.

* * * π

For de tre bedste Løsninger udsættes passende Bogpræmier. Løsningen af Prisopgaven maa være Redaktionen i Hænde senest d. 1. Februar 1921.

Resultater og Løsninger.

1. Paa højre Side af Lighedstegnet kan to af Størrelserne $2ab$, $2ac$ og $2bc$ paa en Gang være negative. I alle andre Tilfælde er Leddene alle positive.

(Løst af I. B. Olsen, Nykøbing Katedralskole.)

2. De søgte Produkter bliver $(x - y + z)^2$, $(2p + 3q - r)^2$, $(m + 3n + s + 3p)(m + 3n + s - 3p)$, $(7a + 2b + 2c)(2b + 2c - a)$.

(Løst af I. B. Olsen).

4. Konen havde 2^{n-1} Æg.

(Løst af Ejnar Lund, Gl. Hellerup Gymnasium, Else Jessen og Vilhelm Pedersen, Nykøbing Katedralskole.)

6. Formuens Størrelse er $a(n-1)^2$ Kr., Bornenes Antal $n - 1$ og hvert Barn faar $a(n-1)$ Kr.

Eks.: 800 000 Kr., 4 Børn; 200 000 Kr.

(Løst af Ejnar Lund og Else Jessen.)

Prisopgave.

Paa den i 1. Hefte, Aargang 1920, stillede Prisopgave (for Gymnasieelever) er der indløbet en Besvarelse, hvis Forfatter, Fr. Fabricius-Bjerre, er tilkendt den udsatte Præmie. Løsningen aftrykkes her i sin Helhed uden foretagne Ændringer.

Opgave.

Vis, at Løsningen i hele Tal af Ligningen $2x^2 - y^2 = \pm 1$, kan anvendes til at bestemme Tilnærmelsesværdier for $\sqrt{2}$ og angiv Fejlgrænserne.

Bestem de laveste 10 Par sammenhorende Værdier af x og y og de tilsvarende Tilnærmelsesværdier for $\sqrt{2}$.

Digitized by Google

Løsning:

$$1)\quad 2x^2 - y^2 = \pm 1$$

$$y^2 = 2x^2 \mp 1$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2 \mp \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0,$$

$$2)\quad \frac{y}{x} = \sqrt{2 \mp \frac{1}{x^2}},$$

idet x og y overalt sættes positive.

Naar x og følgelig y gaar over alle Grænser, faas:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = \sqrt{2}.$$

Af 2) ses endvidere, at $\frac{y}{x}$ vil for voksende Værdier af x og y stige mod $\sqrt{2}$, naar der staar + i 1) og aftage mod $\sqrt{2}$, naar der staar ÷ i 1).

Af 1) faas:

$$2x^2 = y^2 \pm 1,$$

$$2 = \frac{y^2 \pm 1}{x^2},$$

$$\sqrt{2} = \frac{y}{x}\sqrt{1 \pm \frac{1}{y^2}}.$$

Ved at uddrage Roden af $1 \pm \frac{1}{y^2}$ faas Rækker, der ved Multiplikation med $\frac{y}{x}$ kan give Værdier for $\sqrt{2}$, naar hele Værdier af (x, y) indsættes; jo flere Led der medtages, des nøjagtigere bliver Værdien for $\sqrt{2}$.

De to Rækkers første Led er:

$$a)\quad \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} = 1 + \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{8y^4} + \frac{1}{16y^6} - \frac{5}{128y^8} + \frac{7}{256y^{10}} - \cdots$$

$$b)\quad \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}} = 1 - \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{8y^4} - \frac{1}{16y^6} - \frac{5}{128y^8} - \frac{7}{256y^{10}} - \cdots$$

$$a)\quad \sqrt{2} = \frac{y}{x} + \frac{1}{2xy} - \frac{1}{8xy^3} + \frac{1}{16xy^5} - \frac{5}{128xy^7} + \frac{7}{256xy^9} - \cdots$$

$$\sqrt{2} - \frac{y}{x} = \frac{1}{2xy} - \frac{1}{8xy^3} + \frac{1}{16xy^5} - \frac{5}{128xy^7} + \frac{7}{256xy^9} - \cdots$$

Digitized by Google

Heraf ses, at hvis man i Ligningen $2x^2 - y^2 = 1$ sætter $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$, bliver Fejlen

$$\sqrt{2} - \frac{y}{x} < \frac{1}{2xy}.$$

Af b) faas ligeledes

$$\frac{y}{x} - \sqrt{2} = \frac{1}{2xy} + \frac{1}{8xy^3} + \frac{1}{16xy^5} + \frac{5}{128xy^7} + \frac{7}{256xy^9} + \cdots$$

Denne Række giver imidlertid ikke nogen Fejlgrænse, hvorfor jeg sætter:

$$\frac{y}{x} - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2xy} + \frac{1}{4xy^2} + \frac{1}{8xy^3} + \cdots\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{1}{2y}}{1 - \frac{1}{2y}} = \frac{1}{2xy - x}.$$

Af dette ses, at hvis jeg i Ligningen $2x^2 - y^2 = -1$ sætter $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$, bliver Fejlen

$$\frac{y}{x} - \sqrt{2} < \frac{1}{2xy - x}.$$

De samme Fejlgrænser faas ogsaa ved Hjælp af Kædebrøk.

De ti laveste Par hele Løsninger af $2x^2 - y^2 = \pm 1$ er:

x	y
0	1
1	1
2	3
5	7
12	17
29	41
70	99
169	239
408	577
985	1393

Den p' laveste Løsning kaldes (x_p, y_p).

Digitized by Google

Løsningerne ses at kunne dannes efter følgende System:

$$3) \quad \begin{aligned} x_p &= x_{p-1} + y_{p-1}, \\ y_p &= 2x_{p-1} + y_{p-1}. \end{aligned}$$

Rigtigheden heraf ses ved Indsættelse i 1).

Ved at gaa ud fra Løsningerne (0, 1) eller (1, 1) kan jeg saaledes finde ligesaa mange hele Løsninger af 1), som jeg ønsker; at de 10 ovenstaaende Løsninger, der er fundet ved Hjælp af 3), er de laveste, fordrer imidlertid Bevis; dette sker paa følgende Maade:

Har jeg en Løsning af 1) (x_r, y_r), kan jeg faa en Løsning, (x_{r-1}, y_{r-1}), ved at anvende 3), som er **hel, positiv** og **lavere** end (x_r, y_r); $2(x_{r-1} + y_{r-1})^2 - (2x_{r-1} + y_{r-1})^2 = \pm 1$.

Ved Udregning faas:

$$2x_{r-1}^2 - y_{r-1}^2 = \mp 1,$$

Denne Ligning viser, at har jeg Roden (x_r, y_r), er (x_{r-1}, y_{r-1}) ogsaa Rod; af Udtrykket ses yderligere, at hveranden af Rødderne er Rod i $2x^2 - y^2 = +1$, hveranden i $2x^2 - y^2 = -1$.

$$(x_{r-1}, y_{r-1}) \text{ er hel, da } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Ved Subtraktion af Ligningerne 3), faas:

$$4) \quad \begin{aligned} x_{r-1} &= y_r - x_r, \\ y_{r-1} &= 2x_r - y_r; \end{aligned}$$

skal x_{r-1} og y_{r-1} være **positive**, maa:

$$y_r - x_r > 0 \quad \text{og} \quad 2x_r - y_r > 0.$$

Heraf følger, at:

$$5) \quad \begin{aligned} 2x_r > y_r > x_r, \\ 2 > \frac{y_r}{x_r} > 1. \end{aligned}$$

Men ifølge 2) er $\frac{y_r}{x_r} = \sqrt{2 \mp \frac{1}{x_r^2}}$, og naar jeg antager, at $x_p \geqq 2$, ses 5) at være opfyldt.

Digitized by Google

(x_{r-1}, y_{r-1}) er da større end (0, 0).

Skal x_{r-1} og y_{r-1} være lavere end henholdsvis x_r og y_r, maa

$$x_{r-1} - x_r = y_r - 2x_r < 0$$

og

$$y_{r-1} - y_r = 2x_r - 2y_r < 0.$$

Dette ses at være opfyldt ifølge 5).

Jeg har nu bevist, at har jeg en vilkaarlig Løsning (x_r, y_r), hvor x_r er større end eller lig med 2, findes der en hel, positiv og lavere Løsning.

Ved stadig at benytte 3) vil jeg komme til lavere og lavere Løsninger, indtil tilsidst $x < 2$; men for $x < 2$ findes imidlertid ingen andre Løsninger end (1, 1) og (0,1). Naar jeg saaledes fra en vilkaarlig Løsning kan komme ned til de laveste Løsninger paa eentydig Maade, idet x_{p-1} og y_{p-1} udtrykkes eentydigt ved x_p og y_p, maa jeg atter fra disse Løsninger ad samme Vej igen kunne komme til (x_p, y_p), da, paa den anden Side x_p og y_p kan udtrykkes eentydigt ved x_{p-1} og y_{p-1}; jeg benytter nemlig de samme Ligninger 3) ved begge Operationer.

En vilkaarlig Løsning kan altsaa dannes ved Systemet 3), det vil sige, der findes saaledes ingen andre Løsninger end netop disse.

De ti Løsninger, der staar i Skemaet paa Side 133, er de 10 laveste.

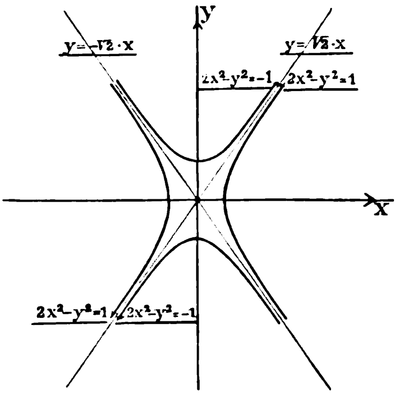
Tilnærmelsesværdier:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356,$$

$x_1 = 0$, $y_1 = 1$ $y_1 : x_1 = \infty$; kan ikke betragtes som Tilnærmelsesværdi for $\sqrt{2}$.

$x_2 = 1$,	$y_2 = 1$	$y_2 : x_2 = 1$
$x_3 = 2$,	$y_3 = 3$	$y_3 : x_3 = 1{,}5$
$x_4 = 5$,	$y_4 = 7$	$y_4 : x_4 = 1{,}4$
$x_5 = 12$,	$y_6 = 17$	$y_5 : x_5 = 1{,}41666667$
$x_6 = 29$,	$y_6 = 41$	$y_6 : x_6 = 1{,}41379310$
$x_7 = 70$,	$y_7 = 99$	$y_7 : x_7 = 1{,}41428571$
$x_8 = 169$,	$y_8 = 239$	$y_8 : x_8 = 1{,}41420118$
$x_9 = 408$,	$y_9 = 579$	$y_9 : x_9 = 1{,}41421569$
$x_{10} = 985$,	$y_{10} = 1393$	$y_{10} : x_{10} = 1{,}41421320.$

Digitized by Google



Hveranden Værdi ses at stige mod $\sqrt{2}$, hveranden at aftage.

Figuren forestiller Kurverne $2x^2 - y^2 = \pm 1$; de ses at være konjugerede Hyperbler med Asymptoter: $y = \pm x\sqrt{2}$.

Her ses geometrisk, hvad der tidligere er omtalt, at

$$\frac{y}{x} < \sqrt{2} \text{ i Kurven } 2x^2 - y^2 = -1$$

og

$$\frac{y}{x} > \sqrt{2} \text{ i Kurven } 2x^2 - y^2 = -1.$$

Frederik Fabricius-Bjerre.

Opgaver til Undervisningsbrug.

90. Tegn et Koordinatsystem og i dette en Firkant, hvis Vinkelspidser er (0,0), (1,1), (1,6) og (0,5). Find Arealet af denne Firkant. π.

91. Tegn den rette Linie, hvis Ligning er $y = 4x - 8$ og find Arealet af den Trekant, som dannes af denne Linie og Koordinatakserne. π.

92. Vinkelspidserne i en Trekant er (1,1), (2,5) og (3,1). Find Længderne af Siderne og Medianerne. π.

93. Find Ligningen for en Cirkel med Centrum i Punktet $(-2,2)$ og Radius $2\sqrt{2}$. Find dernæst Skæringspunkterne mellem denne Cirkel og Koordinatakserne. π.

94. Tegn den rette Linie, hvis Ligning er $2x = y + 10$ og find Længden af den største Side i den Trekant, som denne Linie danner med Koordinatakserne. π.

95. Siderne i en Trekant har Ligningerne

$$y = 2,$$
$$3x - y = 1,$$
$$2x + y = 0.$$

Find Længderne af Siderne og Medianerne. π.

96. Afbild grafisk den Kurve, hvis Ligning er $y = \frac{-2}{x-1}$.

π.

Digitized by Google

97. Tegn Kurven $y = -3x^2$ og find Ligningerne for de Tangenter, hvis Røringspunkter har Ordinaten -3 π.

98. Tegn Kurven $y = x^2$ og find Skæringspunktet mellem de Tangenter, hvis Røringspunkters Abscisser er henholdsvis 2 og -1. π.

99. Find Ligningerne for Medianerne i den Trekant, hvis Vinkelspidser er (0,2), (4,0) og (2,4). Vis, at Medianerne skærer hverandre i eet Punkt, og find dette Punkt. π.

* * *

Naar man, som det sker i flere Lærebøger (se f. Eks. Bonnesens Mat. I og Krügers Mat. II), allerede i I. Gymnasieklasse behandler Spørgsmaalet Grafisk Afbildning og herunder navnlig diskuterer Funktionen $y = \alpha x + q$, er Springet herfra og til en fuldstændig Behandling af den rette Linies analytiske Geometri ikke stort, og det er maaske værd at overveje, om ikke en saadan fuldstændig Behandling vilde afgive et Stof, der er særligt egnet for I. Gymnasieklasse, især med Henblik paa Opgaveregning; der er næppe Tvivl om, at Opgaveregning inden for dette Omraade er godt skikket baade til at vække Elevernes Sans for Betydningen af at diskutere en Opgave og til at indøve dem i at foretage Reduktioner.

Det kan maaske da paaregne nogen Interesse at vise, hvorledes et af de sværere Punkter inden for den rette Linies analytyske Geometri kan behandles, uden at der gøres Laan fra Trigonometrien. De Forudsætninger, der bygges paa, er behandlet i de oven for nævnte Lærebøger.

Normalformen.

Lad $y = \alpha x + q$ ($\alpha \neq 0$) være Ligningen for en ret Linie; denne skærer y-Aksen i Punktet $(0, q)$. Linien deler Planet i to Halvplaner; den af disse, som indeholder de Punkter af y-Aksen, hvis Ordinater er større end q, vil vi f. Eks. betegne ved β, den anden ved γ. Det ses da let, at Polynomiet $y - (\alpha x + q)$ er 0, naar x og y er Koordinater til et Punkt paa den rette Linie, positivt, naar x og y er Koordinater til et Punkt i β, og negativt, naar x og y er Koordinater til et Punkt i γ.

Lad nu (x_1, y_1) være et Punkt uden for den rette Linie; vi vil da finde et Udtryk for Afstanden fra Linien til Punktet

Digitized by Google

(x_1, x_1). Gennem dette Punkt lægges en Linie vinkelret paa Linien $y = \alpha x + q$ (1); denne vinkelrette har Ligningen: $y - y_1 = -\frac{1}{\alpha}(x - x_1)$ (II). Af (I) faas $x = \frac{y - q}{\alpha}$, som indsat i (II) giver: $y - y_1 = -\frac{y_1 - (\alpha x_1 + q)}{1 + \alpha^2}$; (II) giver os dernæst: $x - x_1 = \alpha \cdot \frac{y_1 - (\alpha x_1 + q)}{1 + \alpha^2}$; kaldes den søgte Afstand d, har man: $d = \pm \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \frac{y_1 - (\alpha x_1 + q)}{\pm \sqrt{1 + \alpha^2}}$. Vælger vi et bestemt af Fortegnene i Nævneren, viser dette Udtryk os, at Afstanden fra Linien $y = \alpha x + q$ til Punkter i samme Halvplan faar ens Fortegn, men at Afstandene til et Punkt i den ene Halvplan og et Punkt i den anden Halvplan faar modsat Fortegn. Skrives Liniernes Ligning paa Formen $\frac{y - (\alpha x + q)}{\pm \sqrt{1 + \alpha^2}} = 0$, har vi hermed Normalformen. Er Liniens Ligning givet paa Formen $ay + bx = c$, hvor $a > 0$ og $b \neq 0$, faar man af det forudgaaede:

$$d = \frac{y_1 - \left(-\frac{b}{a} x_1 + \frac{c}{a}\right)}{\pm \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}} = \frac{ay_1 + bx_1 - c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Normalformen er da: $\frac{ay + bx - c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = 0$. Er $y = q$ eller $y - q = 0$ Ligningen for en ret Linie parallel med x-Aksen, bliver dens Normalform $y - q = 0$, hvorved der er sørget for, at Normalerne til Linien har positiv Retning til samme Side som y-Aksen. Er $x = a$ eller $x - a = 0$ Ligningen for en ret Linie parallel med y-Aksen, bliver Normalformen, under lignende Betingelser som ovenfor, $x - a = 0$. π.

Til Tidsskriftets Abonnenter.

Redaktionen beklager at maatte meddele, at man paa Grund af de store Trykningsomkostninger ser sig nødsaget til at begrænse Tidsskriftets Omfang og afslutte Aargangen 1920 med nærværende Hefte.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google